

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên)  
TẠ VĂN ĐỈNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

# TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP MỘT

ĐẠI SỐ  
VÀ  
HÌNH HỌC GIẢI TÍCH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)  
TẠ VĂN ĐÌNH - NGUYỄN HỒ QUỲNH

# TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP MỘT

ĐẠI SỐ

và

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

GIÁO TRÌNH DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT

*(Tái bản lần thứ mười một)*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Việt  
09.1108

## LỜI NÓI ĐẦU

Chương trình môn toán ở trường phổ thông đã có nhiều thay đổi từ khi Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành chương trình cải cách giáo dục. Bộ giáo trình Toán học cao cấp dùng cho các trường đại học kỹ thuật này được viết vừa nhằm thích ứng với sự thay đổi đó ở trường phổ thông, vừa nhằm nâng cao chất lượng giảng dạy toán ở trường đại học.

Toán học cao cấp là một môn học khó mà sinh viên các trường đại học kỹ thuật phải học trong ba học kỳ đầu, bao gồm những vấn đề cơ bản của đại số và giải tích toán học, đóng vai trò then chốt trong việc rèn luyện tư duy khoa học, cung cấp công cụ toán học để sinh viên học các môn học khác ở bậc đại học và xây dựng tiềm lực để tiếp tục tự học sau này.

Khi viết bộ sách này chúng tôi rất chú ý đến mối quan hệ giữa lý thuyết và bài tập. Đối với người học toán, hiểu sâu sắc lý thuyết phải vận dụng được thành thạo các phương pháp cơ bản, các kết quả cơ bản của lý thuyết trong giải toán, làm bài tập và trong quá trình làm bài tập người học hiểu lý thuyết sâu sắc hơn. Các khái niệm cơ bản của đại số và giải tích toán học được trình bày một cách chính xác với nhiều ví dụ minh họa. Phần lớn các định lý được chứng minh đầy đủ. Cán bộ giảng dạy, tùy theo quỹ thời gian của mình, có thể hướng dẫn cho sinh viên tự đọc một số phần, một số chứng minh. Cuối mỗi chương đều có phần tóm tắt với các định nghĩa chính, các định lý và các công thức chủ yếu và phần bài tập đã được chọn lọc kỹ, kèm theo đáp số và gợi ý.

Bộ sách được viết thành 3 tập :

- Tập 1 : Đại số và hình học giải tích.
- Tập 2 : Phép tính giải tích một biến số.
- Tập 3 : Phép tính giải tích nhiều biến số.

Bộ sách là công trình tập thể của nhóm tác giả gồm ba người : Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Tạ Văn Đĩnh và Nguyễn Hồ Quỳnh. Ông Tạ Văn Đĩnh phụ trách viết tập 1. Ông Nguyễn Hồ Quỳnh phụ trách viết 7 chương đầu của tập 2. Ông Nguyễn Đình Trí phụ trách viết chương 8 của tập 2 và toàn bộ tập 3. Cùng với bộ giáo trình này chúng tôi cũng viết 3 tập Bài tập Toán cao cấp nhằm hỗ trợ các bạn đọc cần lời giải chi tiết của những bài tập đã ra trong bộ giáo trình này.

Viết bộ giáo trình này, chúng tôi đã tham khảo kinh nghiệm của nhiều đồng nghiệp đã giảng dạy môn Toán học cao cấp nhiều năm ở nhiều trường đại học. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các nhà giáo, các nhà khoa học đã đọc bản thảo và đóng góp nhiều ý kiến xác đáng.

Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn Ban Giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục về việc xuất bản bộ giáo trình này, cảm ơn các biên tập viên Nguyễn Trọng Bá, Phạm Bảo Khuê, Phạm Phú, Nguyễn Văn Thường của Nhà xuất bản Giáo dục đã làm việc tận tình và khẩn trương.

Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến nhận xét của bạn đọc đối với bộ giáo trình này.

**Các tác giả**



# Chương I

## TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

### 1.0. MỞ ĐẦU

#### 1.0.1. Khái niệm về mệnh đề toán học

Ta hiểu mệnh đề toán học như là một *khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai*, không thể nhập nhằng, nghĩa là không thể vừa đúng vừa sai, cũng không thể vừa không đúng vừa không sai.

*Thí dụ 1.0.1.*

$2 < 3$  là một mệnh đề toán học đúng

$3 > 4$  là một mệnh đề toán học sai

#### 1.0.2. Kí hiệu $\Rightarrow$

Khi với giả thiết mệnh đề A đúng ta chứng minh được mệnh đề B cũng đúng thì ta nói từ *mệnh đề A suy ra mệnh đề B*, hay *mệnh đề A kéo theo mệnh đề B*. Để diễn đạt ý đó ta viết gọn là

$$A \Rightarrow B$$

Đôi khi ta còn viết  $B \Leftarrow A$

*Thí dụ 1.0.2.*  $(a < b) \Rightarrow (a + c < b + c)$

#### 1.0.3. Kí hiệu $\Leftrightarrow$

Khi  $A \Rightarrow B$  đồng thời  $B \Rightarrow A$ , thì ta nói mệnh đề A *tương đương* mệnh đề B. Để diễn đạt ý đó ta viết gọn là

$$A \Leftrightarrow B$$

*Thí dụ 1.0.3.*  $(a < b) \Leftrightarrow (b > a)$   
 $(|a| < b) \Leftrightarrow (-b < a < b)$

### 1.0.4. Điều kiện đủ, điều kiện cần, điều kiện cần và đủ

Khi  $A \Rightarrow B$  ta nói  $A$  là *điều kiện đủ* để có  $B$

$B$  là *điều kiện cần* để có  $A$

Khi  $A \Leftrightarrow B$  tức  $A \Rightarrow B$  và  $B \Rightarrow A$ , ta nói  $A$  là *điều kiện cần và đủ* để có  $B$ .  
 Lúc đó  $B$  cũng là điều kiện cần và đủ để có  $A$ .

*Thí dụ 1.0.4.* Rõ ràng

$(|a| < b) \Rightarrow (b > 0)$ , nhưng từ  $b > 0$  không suy ra được  $|a| < b$ .

Vậy  $|a| < b$  là điều kiện đủ để có  $b > 0$ ,

$b > 0$  là điều kiện cần để có  $|a| < b$ ,

$|a| < b$  không phải là điều kiện cần và đủ để có  $b > 0$ .

### 1.0.5. Kí hiệu :=

Kí hiệu này dùng để đưa vào một định nghĩa, nó thay cho cụm từ “định nghĩa bởi”.

*Thí dụ 1.0.5.* Đường tròn := Quỹ tích của các điểm trong mặt phẳng cách đều một điểm xác định.

### 1.0.6. Kí hiệu $\forall$

Kí hiệu này thay cho cụm từ “với mọi” hay “với bất kì”.

*Thí dụ 1.0.6.*  $\forall x$  thực ta có  $x^2 - x + 1 > 0$ .

### 1.0.7. Kí hiệu $\exists$

Kí hiệu này thay cho cụm từ “tồn tại” hay là “có”.

*Thí dụ 1.0.7.*  $\exists x$  để  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , đó là  $x = 1$  và  $x = 2$ .

BÀI TẬP : 1.1.

## 1.1. TẬP HỢP VÀ PHẦN TỬ

### 1.1.1. Khái niệm về tập hợp và phần tử

Khái niệm tập hợp và phần tử không thể định nghĩa bằng những khái niệm đã biết. Ta coi tập hợp là khái niệm nguyên sơ, không định nghĩa. Tuy nhiên ta có thể nói như sau :

Tất cả những đối tượng xác định nào đó hợp lại tạo thành một tập hợp, mỗi đối tượng cấu thành tập hợp là một phần tử của tập hợp.

*Thí dụ 1.1.1.* Tất cả những người Việt Nam trên thế giới tạo thành tập hợp người Việt Nam. Mỗi người Việt Nam là một phần tử của tập hợp đó.

*Thí dụ 1.1.2.* Tất cả các điểm trong không gian tạo thành tập hợp điểm trong không gian. Mỗi điểm là một phần tử của tập hợp đó.

*Thí dụ 1.1.3.* Tất cả các đường thẳng trong không gian tạo thành tập hợp các đường thẳng trong không gian. Mỗi đường thẳng là một phần tử của tập hợp đó.

### 1.1.2. Khái niệm thuộc và kí hiệu $\in$

Nếu  $a$  là phần tử của tập hợp  $E$  ta nói “ $a$  thuộc  $E$ ” và viết

$$a \in E$$

Nếu  $a$  không là phần tử của  $E$  ta nói “ $a$  không thuộc  $E$ ” và viết

$$a \notin E \text{ hay } a \bar{\in} E.$$

*Thí dụ 1.1.4.*  $4 \in$  tập hợp các số chẵn,

$3 \notin$  tập hợp các số chẵn.

### 1.1.3. Cách mô tả một tập hợp

Muốn mô tả một tập hợp ta phải làm đủ rõ để khi cho một phần tử ta biết được nó có thuộc tập hợp của ta hay không. Thường có hai cách :

1) Liệt kê ra tất cả các phần tử của tập hợp.

*Thí dụ 1.1.5.*  $A := \{x, y, z, t\}$

Tập hợp này chỉ có 4 phần tử là  $x, y, z, t$ .

Vậy  $x \in A, y \in A, z \in A, t \in A,$

nhưng  $u \notin A, v \notin A.$

2) Nêu ra tính chất đặc trưng của các phần tử tạo thành tập hợp.

*Thí dụ 1.1.6.*  $P := \{\text{các số chẵn}\}$ .

Như vậy ta có ngay  $4 \in P$  nhưng  $3 \notin P$ .

#### 1.1.4. Kí hiệu $|$

Tập hợp các số chẵn còn có thể mô tả như sau :

$$P := \{m \mid m = 2n, n \text{ nguyên}\}$$

Cách viết này đọc là :  $P$  là tập hợp các phần tử  $m$  trong đó (hay sao cho)  $m = 2n$  với  $n$  là số nguyên. Rõ ràng đó chỉ là cách diễn đạt khác của tập các số chẵn.

Kí hiệu  $|$  đặt trước phần giải thích tính chất đặc trưng của phần tử  $m$ .

*Chú ý 1.1.1.* Sau này để cho gọn, đôi khi ta chỉ dùng từ "tập" thay cho cụm từ "tập hợp".

#### 1.1.5. Một số tập hợp số thường gặp

Tập các số tự nhiên

$$\mathbf{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbf{N}^* := \{1, 2, \dots\} = \mathbf{N} - \{0\}.$$

Tập các số nguyên

$$\mathbf{Z} := \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}.$$

Tập các số hữu tỉ

$$\mathbf{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid q \neq 0, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Tập các số thực

$$\mathbf{R} := \{\text{các số thực}\}.$$

#### 1.1.6. Tập rỗng

Theo cách nói ở mục 1.1.1 thì một tập hợp phải có ít nhất một phần tử mới có nghĩa. Tuy nhiên để cho tiện về sau, ta đưa thêm vào khái niệm tập rỗng theo quy ước :

**Định nghĩa 1.1.1.** Tập rỗng là tập hợp không có phần tử nào.

Kí hiệu của tập rỗng là  $\emptyset$  (chữ O với một gạch chéo).

**Thí dụ 1.1.7.** Tập nghiệm thực của phương trình

$x^2 - 3x + 2 = 0$  là  $\{1, 2\}$ , nhưng tập nghiệm thực của phương trình  $x^2 + x + 1 = 0$  là  $\emptyset$  vì phương trình này không có nghiệm thực.

### 1.1.7. Sự bằng nhau của hai tập

**Định nghĩa 1.1.2.** Ta nói tập  $A$  bằng tập  $B$  nếu  $A$  và  $B$  trùng nhau, nghĩa là mọi phần tử của  $A$  cũng là phần tử của  $B$  và ngược lại mọi phần tử của  $B$  cũng là phần tử của  $A$ .

Khi  $A$  bằng  $B$  ta viết  $A = B$ .

**Thí dụ 1.1.8.** Cho

$$A := \{x, 1, \square, \Delta\}, \quad B := \{1, \square, x, \Delta\}$$

thì có  $A = B$ .

### 1.1.8. Sự bao hàm – Tập con

**Định nghĩa 1.1.3.** Nếu mọi phần tử của  $A$  cũng là phần tử của  $B$  thì ta nói

$A$  bao hàm trong  $B$

$B$  bao hàm  $A$

$A$  là tập con của  $B$ .

Để diễn đạt ý đó ta viết

$$A \subset B \text{ hay } B \supset A.$$

**Chú ý 1.1.2.** Người ta coi tập  $\emptyset$  là tập con của mọi tập  $A$ .

**Thí dụ 1.1.9.**  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ .

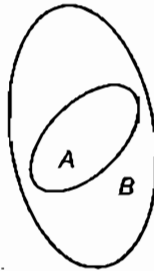
**Chú ý 1.1.3.** Rõ ràng có

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A).$$

### 1.1.9. Biểu diễn hình học - Biểu đồ Ven



Hình 1



Hình 2

Để dễ hình dung một số quan hệ giữa các tập hợp người ta dùng cách biểu diễn hình học gọi là biểu đồ Ven : xem mỗi tập hợp là tập điểm trong một vòng phẳng, mỗi điểm trong vòng là một phần tử của tập hợp (hình 1). Khi đó quan hệ  $A \subset B$  biểu diễn trên hình 2 bằng cách vẽ vòng A nằm trong vòng B.

BÀI TẬP : 1.2, 1.3, 1.4.

## 1.2. CÁC PHÉP TOÁN VỀ TẬP HỢP

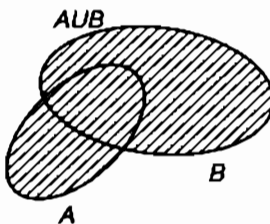
### 1.2.1. Phép hợp

**Định nghĩa 1.2.1.** Hợp của hai tập A và B là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.

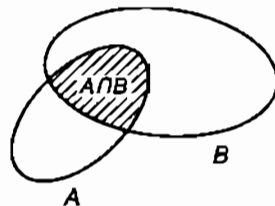
Kí hiệu hợp đó là  $A \cup B$  ta có

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ hoặc } x \in B)$$

Hợp  $A \cup B$  biểu diễn bằng biểu đồ Ven ở hình 3.



Hình 3



Hình 4

### 1.2.2. Phép giao

**Định nghĩa 1.2.2.** Giao của hai tập  $A$  và  $B$  là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử vừa thuộc  $A$  vừa thuộc  $B$ .

Kí hiệu giao đó là  $A \cap B$  ta có

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ và } x \in B)$$

Giao  $A \cap B$  biểu diễn bằng biểu đồ Ven ở hình 4.

**Định nghĩa 1.2.3.** Khi  $A \cap B = \emptyset$  ta nói  $A$  và  $B$  rời nhau.

### 1.2.3. Tính chất

Các tính chất sau suy từ định nghĩa :

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup A = A,$$

$$A \cap A = A,$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Ta chứng minh tính chất đầu tiên. Ta có

$$x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A \text{ hoặc } x \in B) \Rightarrow (x \in B \text{ hoặc } x \in A) \Rightarrow x \in B \cup A,$$

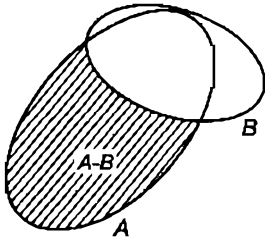
$$x \in B \cup A \Rightarrow (x \in B \text{ hoặc } x \in A) \Rightarrow (x \in A \text{ hoặc } x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B.$$

Vậy

$$A \cup B = B \cup A$$

### 1.2.4. Hiệu của hai tập

**Định nghĩa 1.2.4.** Hiệu của tập  $A$  và tập  $B$  là tập tạo bởi tất cả các phần tử thuộc  $A$  mà không thuộc  $B$ .



Hình 5

Kí hiệu hiệu đó là  $A - B$  hay  $A \setminus B$  ta có  
 $(x \in A - B)$  (hay  $A \setminus B$ )  $\Leftrightarrow (x \in A$  và  $x \notin B)$ . Hiệu của hai tập biểu diễn bằng biểu đồ Ven ở hình 5.

### 1.2.5. Tập bù (còn gọi là tập bổ sung)

**Định nghĩa 1.2.5.** Xét tập  $E$  và  $A$  là tập con của  $E$ , nghĩa là  $A \subset E$ . Lúc đó  $E - A$  gọi là *tập bù của  $A$  trong  $E$* .

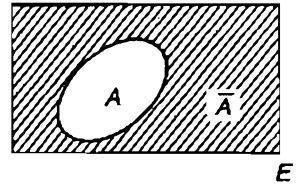
Kí hiệu tập bù đó là  $\bar{A}$  ta có

$$\bar{A} := E - A$$

Tập bù  $\bar{A}$  biểu diễn bằng biểu đồ Ven ở hình 6.

Rõ ràng

$$\bar{\bar{A}} \subset E, \bar{\bar{\bar{A}}} := E - \bar{\bar{A}} = A.$$



Hình 6

### 1.2.6. Định luật De Morgan

Với mọi  $A \subset E, B \subset E$  ta có

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Ta chứng minh đẳng thức đầu. Xét  $x \in E$ . Ta có

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow (x \notin A \text{ và } x \notin B) \Rightarrow (x \in \bar{A} \text{ và } x \in \bar{B}) \\ &\Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} \cap \bar{B} &\Rightarrow (x \in \bar{A} \text{ và } x \in \bar{B}) \Rightarrow (x \notin A \text{ và } x \notin B) \Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in \overline{A \cup B} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

**Thí dụ 1.2.1.** Gọi  $A$  là tập nghiệm của phương trình  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .  $B$  là tập nghiệm của phương trình  $x^2 - 4x + 3 = 0$ . Ta có



$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cap B = \{1\}$$

$$A - B = \{2\}.$$

Tập nghiệm của phương trình

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

là  $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ .

Tập nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

là  $A \cap B = \{1\}$ .

### 1.2.7. Suy rộng

Giả sử  $I$  là một tập con của  $\mathbf{N}$ ,  $I \subset \mathbf{N}$  và  $(A_i)_{i \in I}$  là một họ những tập con của tập  $E$ .

Ta định nghĩa hợp

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ bởi } \{x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I : x \in A_i\}$$

và giao

$$B = \bigcap_{i \in I} A_i \text{ bởi } \{x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I : x \in A_i\}$$

Định luật De Morgan suy rộng cho họ những tập con của  $E$  sẽ có dạng

$$\overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

$$\overline{\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

### 1.2.8. Khái niệm phủ và phân hoạch

Giả sử  $I \subset \mathbf{N}$  và  $S = \{(A_i)_{i \in I}\}$  là một họ những tập con của tập  $E$ .

Nếu  $\bigcup_{i \in I} A_i = E$  thì ta nói  $S$  là một *phủ* của  $E$ .

Nếu ngoài ra,  $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$  và  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ , thì nói họ  $S$  là một *phân hoạch* của  $E$ .

*Thí dụ 1.2.2.* Xét  $E$  là mặt phẳng  $Oxy$  thì tập tất cả các đường thẳng vuông góc với  $Ox, x = x_i, x_i \in \mathbf{R}$  tạo thành một phân hoạch của  $E$ .

BÀI TẬP : 1.5, 1.6, 1.7.

## 1.3. TÍCH ĐỀ CÁC

### 1.3.1. Tích đề các của hai tập

**Định nghĩa 1.3.1.** Tích đề các của hai tập  $A$  và  $B$  là tập tất cả các cặp  $(a, b), a$  trước  $b$  sau, được tạo nên do lấy  $a \in A, b \in B$  một cách bất kì.

Kí hiệu tích đó là  $A \times B$ , ta có

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

*Thí dụ 1.3.1.* Cho

$$A = \{1, 3\}, B = \{2, x\}$$

thì

$$A \times B := \{(1, 2), (1, x), (3, 2), (3, x)\}.$$

và

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

*Chú ý 1.3.1.* Chú ý rằng  $(1, 3)$  và  $(3, 1)$  là hai cặp khác nhau.

### 1.3.2. Tích đề các của ba tập

**Định nghĩa 1.3.2.** Tích đề các của ba tập  $A, B, C$  là tập tất cả các bộ ba  $(a, b, c)$  theo thứ tự  $a$  rồi  $b$  rồi  $c$ , được tạo thành do lấy  $a \in A$ , rồi  $b \in B$ , rồi  $c \in C$  một cách bất kì.

Kí hiệu tích đó là  $A \times B \times C$  ta có

$$A \times B \times C := \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

*Thí dụ 1.3.2.* Nếu  $A = \{1, 3\}, B = \{2, x\}, C = \{\Delta\}$  thì

$$A \times B \times C = \{(1, 2, \Delta), (1, x, \Delta), (3, 2, \Delta), (3, x, \Delta)\}$$

và  $A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 3, 1), (1, 3, 3),$   
 $(3, 1, 1), (3, 1, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 3)\}.$

### 1.3.3. Tích đề các của $n$ tập

**Định nghĩa 1.3.3.** Tích đề các của  $n$  tập  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là tập tất cả các bộ  $n$  phần tử  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  theo thứ tự  $a_1$ , rồi  $a_2, \dots$ , rồi  $a_n$  được tạo thành do lấy  $a_1 \in A_1$ , rồi  $a_2 \in A_2, \dots$ , rồi  $a_n \in A_n$  một cách bất kì.

Kí hiệu tích đó là  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , ta có :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}$$

Tích đề các  $A \times A \times \dots \times A$  ( $n$  lần) viết gọn là  $A^n$  :

$$A^n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A, i = \overline{1, n}\}$$

**BÀI TẬP :** 1.8, 1.9.

## 1.4. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ QUAN HỆ THỨ TỰ

### 1.4.1. Khái niệm về quan hệ hai ngôi

**Định nghĩa 1.4.1.** Cho tập  $E$  và tính chất  $\mathcal{R}$  liên quan đến hai phần tử của  $E$ . Nếu  $a$  và  $b$  là hai phần tử của  $E$  thoả mãn tính chất  $\mathcal{R}$  thì ta nói  $a$  có quan hệ  $\mathcal{R}$  với  $b$  và viết  $a \mathcal{R} b$ .

Quan hệ này gọi là *quan hệ hai ngôi trên E*.

Xét một số thí dụ :

*Thí dụ 1.4.1.* Trên tập các đường thẳng trong không gian, "đường thẳng D vuông góc với đường thẳng D'" là một quan hệ hai ngôi.

*Thí dụ 1.4.2.* Trên tập các số tự nhiên  $\mathbf{N}^*$ , " $a$  nguyên tố với  $b$ " là một quan hệ hai ngôi.

*Thí dụ 1.4.3.* Trên tập số thực  $\mathbf{R}$ , " $a = b$ " là một quan hệ hai ngôi ; " $a < b$ " cũng là một quan hệ hai ngôi.

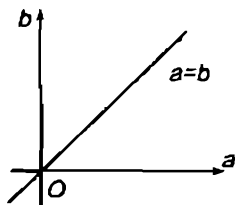
### 1.4.2. Đồ thị của quan hệ hai ngôi

Khi  $a \mathcal{R} b$  ta cũng nói cặp  $(a, b)$  thoả mãn quan hệ  $\mathcal{R}$ . Cặp  $(a, b)$  là phần tử của tích  $E \times E$ . Ta chú ý đến tập  $G$  tất cả các cặp  $(a, b) \in E \times E$  thoả mãn  $\mathcal{R}$ . Ta gọi  $G$  là *đồ thị* của quan hệ  $\mathcal{R}$ . Vậy có

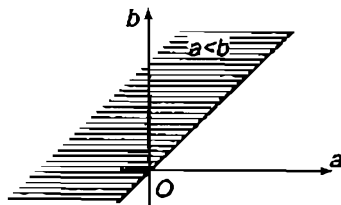
**Định nghĩa 1.4.2.** Đồ thị của quan hệ  $\mathcal{R}$  là tập tất cả các cặp  $(a, b)$  của  $E \times E$  thoả mãn quan hệ  $\mathcal{R}$ .

*Thí dụ 1.4.4.* Đồ thị của quan hệ " $a = b$ " trên  $\mathbf{R}$  là đường phân giác của các góc vuông I và III trong mặt phẳng tọa độ  $Oab$  (hình 7).

*Thí dụ 1.4.5.* Đồ thị của quan hệ " $a < b$ " trên  $\mathbf{R}$  là nửa mặt phẳng ở trên đường phân giác của các góc vuông I và III (hình 8).



Hình 7



Hình 8

### 1.4.3. Một số tính chất của quan hệ hai ngôi

Tuỳ theo định nghĩa, một quan hệ hai ngôi  $\mathcal{R}$  trên  $E$  có thể có một số tính chất sau đây :

1) *Tính phản xạ* : Quan hệ  $\mathcal{R}$  có tính phản xạ nếu

$$a \mathcal{R} a, \forall a \in E$$

*Thí dụ 1.4.6.* Quan hệ " $a = b$ " trên  $\mathbf{R}$  có tính phản xạ vì  $a = a$ , nhưng quan hệ " $a < b$ " không có tính phản xạ vì không có  $a < a$ .

2) *Tính đối xứng* : Quan hệ  $\mathcal{R}$  có tính đối xứng nếu

$$a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$$

*Thí dụ 1.4.7.* Quan hệ " $a = b$ " trên  $\mathbf{R}$  có tính đối xứng vì  $a = b \Rightarrow b = a$ .

Quan hệ " $a < b$ " trên  $\mathbf{R}$  không có tính đối xứng vì từ  $a < b$  không suy ra  $b < a$ .

3) *Tính bắc cầu* : Quan hệ  $\mathcal{R}$  có tính bắc cầu nếu

$$(a \mathcal{R} b \text{ và } b \mathcal{R} c) \Rightarrow a \mathcal{R} c.$$

*Thí dụ 1.4.8.* Quan hệ " $a = b$ " trên  $\mathbf{R}$  có tính bắc cầu vì  $(a = b \text{ và } b = c) \Rightarrow a = c$ .

Quan hệ " $a < b$ " cũng có tính bắc cầu vì  $(a < b \text{ và } b < c) \Rightarrow a < c$ .

4) *Tính phản đối xứng* : Quan hệ  $\mathcal{R}$  có tính phản đối xứng nếu

$$(a \mathcal{R} b \text{ và } b \mathcal{R} a) \Rightarrow a = b.$$

*Thí dụ 1.4.9.* Quan hệ " $a \leq b$ " trên  $\mathbf{R}$  có tính phản đối xứng vì  $(a \leq b \text{ và } b \leq a) \Rightarrow a = b$ .

#### 1.4.4. Quan hệ tương đương

**Định nghĩa 1.4.3.** Quan hệ hai ngôi  $\mathcal{R}$  trên tập  $E$  gọi là một quan hệ tương đương nếu nó có ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Khi  $\mathcal{R}$  là một quan hệ tương đương và  $a \mathcal{R} b$  ta viết

$$a \sim b (\mathcal{R})$$

và đọc : " $a$  tương đương  $b$  theo quan hệ  $\mathcal{R}$ ".

Bạn đọc có thể kiểm tra lại các khẳng định trong các thí dụ sau.

*Thí dụ 1.4.10.* Trong  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  quan hệ " $a = b$ " là một quan hệ tương đương (xem các thí dụ 1.4.6, 1.4.7, 1.4.8).

*Thí dụ 1.4.11.* Trong  $\mathbf{Z}$  quan hệ " $a - b$  là bội của một số nguyên  $p$  khác 0 cho trước" là một quan hệ tương đương. Lúc đó ta viết

$$a \equiv b (p) \text{ hay } a \equiv b \pmod{p}$$

và đọc : " $a$  đồng dư  $b$  môđulô  $p$ ".

*Thí dụ 1.4.12.* Trong tập các đường thẳng trong không gian quan hệ "đường thẳng  $D$  đồng phương với đường thẳng  $D'$ " là một quan hệ tương đương.

*Thí dụ 1.4.13.* Trong tập các vectơ tự do trong không gian quan hệ "vectơ  $\vec{u}$  bằng vectơ  $\vec{v}$ " là một quan hệ tương đương.

#### 1.4.5. Lớp tương đương

Xét tập  $E$  trong đó có một quan hệ tương đương  $\mathcal{R}$ ; gọi  $a$  là một phần tử xác định của  $E$ . Khi đó tất cả các phần tử  $b \in E$  tương đương với  $a$  lập thành một tập gọi là *lớp tương đương* của  $a$  theo quan hệ  $\mathcal{R}$ . Kí hiệu lớp đó là  $\mathcal{C}(a, \mathcal{R})$  ta có

$$\mathcal{C}(a, \mathcal{R}) := \{b \mid b \in E, b \sim a (\mathcal{R})\}$$

Có thể xem  $a$  là phần tử đại diện cho lớp  $\mathcal{C}(a, \mathcal{R})$ .

*Thí dụ 1.4.14.* Trong tập các đường thẳng trong không gian, tất cả các đường thẳng đồng phương với một đường thẳng  $\Delta$  cho trước tạo thành lớp tương đương của  $\Delta$  theo quan hệ "đồng phương" mà phần tử đại diện là  $\Delta$ . Có thể nói mỗi lớp tương đương đó xác định một phương trong không gian.

*Thí dụ 1.4.15.* Trong tập tất cả các vectơ tự do trong không gian, tất cả các vectơ bằng một vectơ  $\overline{OA}$  gốc  $O$  cho trước tạo thành một lớp tương đương theo quan hệ "bằng nhau" mà phần tử đại diện là  $\overline{OA}$ .

*Thí dụ 1.4.16.* Trong  $\mathbf{R}$  lớp tương đương của một số xác định  $a$  theo quan hệ " $a = b$ " chỉ có một phần tử là  $a$ .

*Chú ý 1.4.1 :* Tập tất cả các lớp tương đương  $\mathcal{C}(a, \mathcal{R})$  tạo thành một phân hoạch trên  $E$ .

### 1.4.6. Quan hệ thứ tự

**Định nghĩa 1.4.4.** Quan hệ hai ngôi  $\mathcal{R}$  trên tập  $E$  gọi là một quan hệ thứ tự nếu nó có ba tính chất : phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

Bạn đọc có thể kiểm tra lại các khẳng định trong các thí dụ sau :

*Thí dụ 1.4.17.* Trong  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  quan hệ " $a \leq b$ " là một quan hệ thứ tự.

*Thí dụ 1.4.18.* Trong  $\mathbf{N}$  quan hệ " $a$  chia hết cho  $b$ " là một quan hệ thứ tự.

*Thí dụ 1.4.19.* Trong tập các tập con của một tập  $E$  cho trước, quan hệ  $A \subset B$  là một quan hệ thứ tự.

### 1.4.7. Quan hệ thứ tự toàn phần

**Định nghĩa 1.4.5.** Một quan hệ thứ tự  $\mathcal{R}$  trên tập  $E$  gọi là quan hệ thứ tự toàn phần nếu  $\forall a, b \in E$ , ta đều có hoặc  $a \mathcal{R} b$  hoặc  $b \mathcal{R} a$ .

*Thí dụ 1.4.20.* Trên  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ , quan hệ " $a \leq b$ " là một quan hệ thứ tự toàn phần vì  $\forall a, b \in \mathbf{N}$  hay  $\mathbf{Z}$  hay  $\mathbf{Q}$  hay  $\mathbf{R}$  ta đều có hoặc  $a \leq b$  hoặc  $b \leq a$ .

*Thí dụ 1.4.21.* Trên tập các tập con của một tập cho trước  $E$ , quan hệ " $\subset$ " là một quan hệ thứ tự không toàn phần vì nếu  $A$  và  $B$  rời nhau chẳng hạn thì không có  $A \subset B$  cũng không có  $B \subset A$ .

### 1.4.8. Tập có thứ tự

**Định nghĩa 1.4.6.** Xét tập  $E$  trong đó có một quan hệ thứ tự  $\mathcal{R}$ . Cho hai phần tử bất kì  $a$  và  $b$  của  $E$ . Nếu  $a \mathcal{R} b$  ta nói  $a$  có thể so sánh được với  $b$ . Các phần tử so sánh được với nhau sắp xếp theo một thứ tự xác định theo quan hệ  $\mathcal{R}$ .

**Định nghĩa 1.4.7.** Nếu  $\mathcal{R}$  là một quan hệ thứ tự toàn phần thì tất cả các phần tử của  $E$  đều được sắp thứ tự theo quan hệ  $\mathcal{R}$ . Ta nói  $E$  được sắp thứ tự toàn phần bởi quan hệ  $\mathcal{R}$ .

Nếu  $\mathcal{R}$  là một quan hệ thứ tự không toàn phần thì chỉ có một số phần tử của  $E$  được sắp xếp theo quan hệ  $\mathcal{R}$ . Ta nói  $E$  là tập có thứ tự bộ phận hay  $E$  được sắp thứ tự bộ phận.

*Thí dụ 1.4.22.* Các tập  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  là những tập có thứ tự toàn phần theo quan hệ thứ tự " $a \leq b$ ".

*Thí dụ 1.4.23.* Tập các tập con của một tập  $E$  cho trước là một tập có thứ tự bộ phận theo quan hệ " $\subset$ ".

BÀI TẬP : 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15.

## 1.5. ÁNH XẠ

### 1.5.1. Mở đầu

Cho hai tập  $E$  và  $F$  và một quy luật  $f$  liên hệ các phần tử của  $E$  với một số phần tử của  $F$ .

*Thí dụ 1.5.1.*  $E = F = \mathbf{R}$

$x \in \mathbf{R}$  liên hệ với  $y \in \mathbf{R}$  bởi  $y = x^3$ .

*Thí dụ 1.5.2.*  $E = F = \mathbf{R}$

$x \in \mathbf{R}$  liên hệ với  $y \in \mathbf{R}$  bởi quy luật  $y = x^2$ .

*Thí dụ 1.5.3.*  $E = \mathbf{R}$ ,  $F = \mathbf{Z}$

$x \in \mathbf{R}$  liên hệ với  $y \in \mathbf{Z}$  bởi quy luật  $y = [x]$ ,

$[x]$  kí hiệu phần nguyên của  $x$ .

*Thí dụ 1.5.4.*  $E = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -1 \leq x \leq 1\}$

$F = \mathbf{R}$

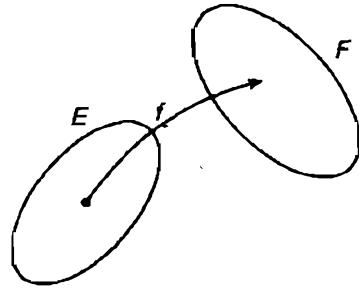
$x \in E$  liên hệ với  $y \in \mathbf{R}$  bởi quy luật

$y = \text{cung có sin là } x$ .



*Thí dụ 1.5.5.*  $E$  là tập các điểm trong không gian kí hiệu là  $\mathcal{K}$ ,  $F$  là tập các điểm trong một mặt phẳng xác định  $\pi$ .

Điểm  $M \in \mathcal{K}$  liên hệ với điểm  $P \in \pi$  bởi quy luật : " $P$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  lên mặt phẳng  $\pi$ ".



Hình 9

Nếu quy luật  $f$  có đặc điểm sao cho nó tạo ra từ mỗi phần tử của  $E$  một và chỉ một phần tử của  $F$  (hình 9) thì ta nói  $f$  là một ánh xạ từ  $E$  tới  $F$ . Vậy có định nghĩa ánh xạ như sau :

### 1.5.2. Định nghĩa ánh xạ

**Định nghĩa 1.5.1.** Ánh xạ từ tập  $E$  tới tập  $F$  là một quy luật  $f$  liên hệ giữa  $E$  và  $F$  sao cho khi nó tác động vào một phần tử  $x$  bất kì của  $E$  sẽ tạo ra một và chỉ một phần tử  $y$  của  $F$ .

*Thí dụ 1.5.6.* Xét các quy luật đã nêu ở các thí dụ 1.5.1 – 1.5.5 :

1) Quy luật ở thí dụ 1.5.1 là một ánh xạ từ  $\mathbf{R}$  tới  $\mathbf{R}$  vì mỗi  $x \in \mathbf{R}$  tạo ra một và chỉ một  $y \in \mathbf{R}$  xác định bởi  $y = x^3$ .

2) Quy luật ở thí dụ 1.5.2 là một ánh xạ từ  $\mathbf{R}$  tới  $\mathbf{R}$  vì mỗi  $x \in \mathbf{R}$  tạo ra một và chỉ một  $y \in \mathbf{R}$  xác định bởi  $y = x^2$ .

3) Quy luật ở thí dụ 1.5.3 là một ánh xạ từ  $\mathbf{R}$  tới  $\mathbf{Z}$  vì mỗi  $x \in \mathbf{R}$  tạo ra một và chỉ một  $y \in \mathbf{Z}$  xác định bởi  $y = [x]$ .

4) Quy luật ở thí dụ 1.5.4 không phải là một ánh xạ từ  $E$  tới  $\mathbf{R}$  vì mỗi  $x \in E$  tạo ra vô số  $y \in \mathbf{R}$  xác định bởi  $y$  bằng cung có sin là  $x$ , chẳng hạn với  $x = \frac{1}{2} \in E$  thì các cung  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  và  $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , đều có sin là  $\frac{1}{2}$ .

5) Quy luật ở thí dụ 1.5.5 là một ánh xạ từ  $\mathcal{H}$  tới  $\pi$  vì mỗi điểm  $M \in \mathcal{H}$  chiếu vuông góc lên mặt phẳng  $\pi$  cho một và chỉ một điểm  $P \in \pi$ .

### 1.5.3. Kí hiệu ánh xạ

Để diễn tả  $f$  là ánh xạ từ tập  $E$  tới tập  $F$  ta viết

$$f: E \rightarrow F \text{ hay } E \xrightarrow{f} F$$

và gọi  $E$  là *tập nguồn*,  $F$  là *tập đích*.

Phần tử  $y \in F$  được tạo ra từ phần tử  $x \in E$  bởi quy luật  $f$  gọi là *ảnh* của  $x$  và  $x$  gọi là *ngược ảnh* (hay *tạo ảnh*) của  $y$ . Ta viết

$$y = f(x)$$

hay  $x \mapsto y = f(x)$

hay  $x \mapsto y$

$f(x)$  đọc là " $f$  của  $x$ " hay " $f$  tại  $x$ ".

**Chú ý 1.5.1.** Chú ý rằng mỗi phần tử của  $E$  có một và chỉ một ảnh, nhưng mỗi  $y \in F$  chưa chắc đã có ngược ảnh.

**Định nghĩa 1.5.2.** Tập tạo bởi các ảnh của tất cả các phần tử  $x \in E$  gọi là *ảnh của  $E$  (qua  $f$ )*, viết là  $f(E)$  :

$$f(E) := \{y \mid y = f(x), x \in E\}$$

hay

$$f(E) := \{y \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Ta luôn có

$$f(E) \subset F$$

**Định nghĩa 1.5.3.** Nếu  $A$  là một tập con của  $E$  :  $A \subset E$ , thì tập

$$f(A) := \{y \mid y = f(x), x \in A\}$$

gọi là *ảnh của  $A$  (qua  $f$ )*.

Nếu  $B \subset F$  thì tập  $f^{-1}(B) := \{x \mid x \in E, f(x) = y \in B\}$  gọi là *nghịch ảnh* của  $B$  trong ánh xạ  $f$ .

### 1.5.4. Đơn ánh

Xét  $f : E \rightarrow F$ .

Nói chung mỗi phần tử  $y$  thuộc tập đích  $F$  có thể là ảnh của một hay nhiều phần tử khác nhau ở tập nguồn  $E$ . Nếu nó chỉ có thể là ảnh của một phần tử thì ta nói  $f$  là đơn ánh. Vậy có

**Định nghĩa 1.5.4.** Ánh xạ  $f : E \rightarrow F$  gọi là một đơn ánh nếu

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad (1.1.1)$$

Muốn chứng minh ánh xạ  $f : E \rightarrow F$  là một đơn ánh ta phải kiểm tra lại điều kiện (1.1.1).

Ta cũng có thể xét "phương trình"

$$f(x) = y, y \in F$$

Nếu "phương trình" với ẩn  $x$  này không thể có quá một nghiệm với mọi  $y$  của  $F$  thì  $f$  là đơn ánh.

**Thí dụ 1.5.7.** Ta duyệt lại các ánh xạ ở mục 1.5.1 và 1.5.2

1) Xét ánh xạ ở thí dụ 1.5.1 : Phương trình

$$x^3 = y, y \in \mathbf{R}$$

có nghiệm duy nhất  $x = \sqrt[3]{y} \in \mathbf{R}$ . Vậy ánh xạ này là đơn ánh.

2) Xét ánh xạ ở thí dụ 1.5.2 : phương trình

$$x^2 = y, y \in \mathbf{R}$$

Có hai nghiệm khác nhau nếu  $y > 0$ . Vậy ánh xạ này không phải là đơn ánh.

3) Xét ánh xạ ở thí dụ 1.5.3 : phương trình

$$[x] = y, y \in \mathbf{N}$$

Có vô số nghiệm, chẳng hạn với  $y = 1$  thì  $x = 1, 1$  hay  $1, 3, \dots$  đều có phần nguyên là 1. Vậy ánh xạ này không là đơn ánh.

4) Quy luật ở thí dụ 1.5.4 không phải là một ánh xạ, nên đương nhiên nó không phải là đơn ánh.

5) Xét ánh xạ ở thí dụ 1.5.5 ta kiểm tra điều kiện (1.1.1). Một điểm  $P \in \pi$  có vô số điểm  $M \in \mathcal{H}$  chiếu vuông góc lên  $\pi$  thành  $P$ , đó là tất cả các điểm  $M$  nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $\pi$  tại  $P$ . Vậy ánh xạ này không phải là đơn ánh.

### 1.5.5. Toàn ánh

Xét ánh xạ  $f: E \rightarrow F$ .

Nói chung  $f(E)$  là một tập con của  $F: f(E) \subset F$ . Nếu có  $f(E) = F$  thì  $f$  được gọi là một toàn ánh: Vậy có

**Định nghĩa 1.5.5.** Ánh xạ  $f: E \rightarrow F$  gọi là một toàn ánh nếu

$$f(E) = F. \quad (1.1.2)$$

Khi  $f$  là một toàn ánh ta cũng nói  $f$  là ánh xạ từ  $E$  lên  $F$ .

Mệnh đề (1.1.2) có nghĩa là mỗi  $y \in F$  đều là ảnh của ít nhất một  $x \in E$ . Muốn chứng minh ánh xạ  $f: E \rightarrow F$  là một toàn ánh ta phải kiểm tra lại điều kiện (1.1.2).

Ta cũng có thể xét "phương trình"

$$f(x) = y, y \in F$$

Nếu "phương trình" này có nghiệm với mọi  $y \in F$  thì  $f$  là một toàn ánh.

*Thí dụ 1.5.8.* Ta duyệt lại các thí dụ ở mục 1.5.1 và 1.5.2.

1) Xét ánh xạ ở thí dụ 1.5.1: phương trình

$$x^3 = y, y \in \mathbf{R}$$

luôn có nghiệm  $\forall y \in \mathbf{R}$ . Vậy ánh xạ này là một toàn ánh.

2) Xét ánh xạ ở thí dụ 1.5.2: Phương trình

$$x^2 = y, y \in \mathbf{R}$$

chỉ có nghiệm khi  $y \geq 0$ . Vậy ánh xạ này không là toàn ánh.

Chú ý rằng cũng có thể xét  $f(\mathbf{R})$  :

$f(\mathbf{R}) = \{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}^+ := \{y \mid y \geq 0\} \neq \mathbf{R}$  nên cũng kết luận được rằng ánh xạ này không là toàn ánh.

3) Xét ánh xạ ở thí dụ 1.5.3 : Phương trình :

$$[x] = y, y \in \mathbf{N}$$

bao giờ cũng có nghiệm  $\forall y \in \mathbf{N}$ . Vậy ánh xạ này là toàn ánh.

4) Quy luật ở thí dụ 1.5.4 không phải là ánh xạ, nên đương nhiên không phải là toàn ánh.

5) Xét ánh xạ ở thí dụ 1.5.5 ta kiểm tra điều kiện (1.1.2).

Rõ ràng  $f(\mathcal{X}) = \pi$

Vậy ánh xạ này là toàn ánh.

### 1.5.6. Song ánh

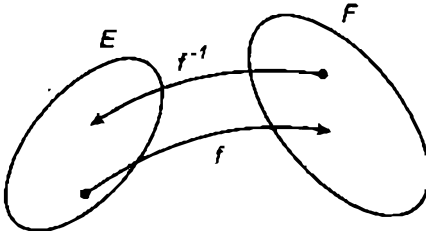
**Định nghĩa 1.5.6.** Ánh xạ  $f : E \rightarrow F$  gọi là một song ánh nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

*Thí dụ 1.5.9.* Ta duyệt lại các ánh xạ ở mục 1.5.1 và 1.5.2. Theo các kết quả ở hai mục trên ta có :

- 1) Ánh xạ ở thí dụ 1.5.1 là song ánh
- 2) Ánh xạ ở thí dụ 1.5.2 không là song ánh
- 3) Ánh xạ ở thí dụ 1.5.3 không là song ánh
- 4) Quy luật ở thí dụ 1.5.4 không phải là ánh xạ
- 5) Ánh xạ ở thí dụ 1.5.5 không phải là song ánh.

### 1.5.7. Ánh xạ ngược của một song ánh – Tương ứng 1-1

Xét hai tập  $E$  và  $F$  và  $f$  là một song ánh từ  $E$  tới  $F$ . Khi đó (xem hình 10) :



Hình 10

Ứng với mỗi  $y \in F$  có một và chỉ một  $x \in E$  để  $y = f(x)$  (có một vì  $f$  là toàn ánh từ  $E$  lên  $F$  và chỉ có một vì  $f$  là đơn ánh từ  $E$  tới  $F$ ). Vậy có

**Định lý và định nghĩa 1.5.7.**

Song ánh  $f : E \rightarrow F$  tạo ra một

ánh xạ từ  $F$  tới  $E$ . Ánh xạ này gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ  $f$  và kí hiệu là  $f^{-1}$  :

$$f^{-1} : F \rightarrow E$$

với đặc điểm :

nếu  $f(x) = y$  thì  $f^{-1}(y) = x$  ( $x \in E, y \in F$ ),

nếu  $f^{-1}(y) = x$  thì  $f(x) = y$  ( $y \in F, x \in E$ ).

Rõ ràng  $f^{-1}$  cũng là một song ánh.

Đồng thời với song ánh  $f : E \rightarrow F$  ta có một tương ứng 1 - 1 hai chiều giữa  $E$  và  $F$ , chiều từ  $E$  tới  $F$  thực hiện bởi ánh xạ  $f$ , còn chiều từ  $F$  tới  $E$  thực hiện bởi ánh xạ  $f^{-1}$ .

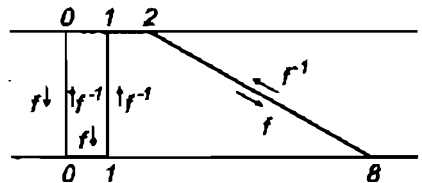
*Thí dụ 1.5.10.* Song ánh  $f$  từ  $\mathbf{R}$  tới  $\mathbf{R}$  xác định bởi

$$x \in \mathbf{R} \mapsto y = x^3 \in \mathbf{R}$$

có ánh xạ ngược  $f^{-1}$  từ  $\mathbf{R}$  tới  $\mathbf{R}$  xác định bởi

$$y \in \mathbf{R} \mapsto x = \sqrt[3]{y} \in \mathbf{R}$$

Song ánh này tạo ra một tương ứng 1 - 1 giữa  $\mathbf{R}$  và  $\mathbf{R}$  (xem hình 11).



Hình 11

### 1.5.8. Hợp (tích) của hai ánh xạ

Cho ba tập hợp  $E, F, G$  và hai ánh xạ

$$f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$$

Như vậy mỗi  $x \in E$  tạo ra bởi  $f$  một và chỉ một  $y \in F$ :

$$f(x) = y$$

và mỗi  $y \in F$  tạo ra bởi  $g$  một và chỉ một  $z \in G$ :

$$g(y) = z$$

Do đó mỗi  $x \in E$  tạo ra (qua trung gian  $y$ ) một và chỉ một  $z \in G$  xác định bởi  $g[f(x)] = z$ .

Vậy có một ánh xạ từ  $E$  tới  $G$  xác định như sau:

$$x \in E \mapsto z = g[f(x)] \in G$$

**Định nghĩa 1.5.8.** Ánh xạ này gọi là *hợp của  $f$  và  $g$*  (hay *tích của  $f$  và  $g$* ), kí hiệu là  $g \circ f$ :

$$g \circ f: E \rightarrow G$$

xác định như sau:

$$x \in E \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] \in G$$

**Thí dụ 1.5.11.** Cho  $E = F = G = \mathbf{R}$ .

$$x \in \mathbf{R} \mapsto y = f(x) = x^2 \in \mathbf{R}$$

$$y \in \mathbf{R} \mapsto z = g(y) = y - 5 \in \mathbf{R}$$

thì ánh xạ hợp  $g \circ f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  xác định như sau

$$x \in \mathbf{R} \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] = x^2 - 5 \in \mathbf{R}$$

**Chú ý 1.5.2**

Hợp của hai đơn ánh là một đơn ánh.

Hợp của hai toàn ánh là một toàn ánh.

Hợp của hai song ánh là một song ánh.

Đề nghị bạn đọc kiểm tra lại.

*Chú ý 1.5.3.* Cho hai tập  $E$  và  $F$  và song ánh  $f: E \rightarrow F$ . Theo mục 1.5.7 thì tồn tại ánh xạ ngược

$$f^{-1}: F \rightarrow E$$

Ta có

$$x \in E \mapsto (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$$

$$y \in F \mapsto (f \circ f^{-1})(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y$$

nghĩa là có

$$f^{-1} \circ f = I_E, \quad f \circ f^{-1} = I_F$$

trong đó

$I_E$  là ánh xạ đồng nhất trong  $E$

$I_F$  là ánh xạ đồng nhất trong  $F$

nghĩa là

$$\forall x \in E \quad I_E(x) = x$$

$$\forall y \in F \quad I_F(y) = y$$

**BÀI TẬP :** 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24.

## 1.6. TẬP HỮU HẠN – TẬP ĐẾM ĐƯỢC – TẬP KHÔNG ĐẾM ĐƯỢC

### 1.6.1. Một số thí dụ mở đầu

Xét

$A = \{a, b, c\}$  có 3 phần tử

$B = \{x_1, x_2, x_3\}$  có 3 phần tử



$M = \{1, 2, \dots, n\}$  có  $n$  phần tử

$D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  có  $n$  phần tử.

Những tập này chỉ có một số hữu hạn phần tử.

Bây giờ xét

$$\mathbf{N}^* = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

$$\mathbf{R} = \{\text{Số thực}\}$$

$$Y = \{y \mid y \in \mathbf{R}, 0 < y < 1\}$$

Các tập này có vô số phần tử.

### 1.6.2. Lực lượng của tập hợp

**Định nghĩa 1.6.1.** Nói hai tập  $E$  và  $F$  có cùng lực lượng nếu tồn tại một tương ứng 1-1 giữa chúng.

Muốn cho  $E$  và  $F$  có cùng lực lượng, điều kiện cần và đủ là giữa chúng tồn tại một song ánh.

Trở lại các thí dụ ở mục 1.6.1.

Giữa  $A$  và  $B$  có tương ứng 1-1.

$$a \leftrightarrow x_1, b \leftrightarrow x_2, c \leftrightarrow x_3$$

Điều đó biểu hiện ở chỗ chúng cùng có 3 phần tử. Ta nói 3 là lực lượng của  $A$  và  $B$ .

Giữa  $M$  và  $D$  có tương ứng 1-1

$$i \leftrightarrow x_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Điều đó biểu hiện ở chỗ chúng cùng có  $n$  phần tử. Ta nói  $n$  là lực lượng của  $M$  và  $D$ .

Giữa  $\mathbf{N}^*$  và  $X$  có tương ứng 1-1

$$i \leftrightarrow x_i, i = 1, 2, \dots$$

Ta nói  $\mathbf{N}^*$  và  $X$  có cùng lực lượng.

Giữa  $\mathbf{R}$  và  $Y$  có tương ứng 1-1

$$x \in \mathbf{R} \leftrightarrow y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$$

Ta nói  $\mathbf{R}$  và  $Y$  có cùng lực lượng.

### 1.6.3. Tập hữu hạn. – Tập đếm được và tập không đếm được

Tập  $M$  và các tập có cùng lực lượng với nó gọi là các *tập hữu hạn* (có  $n$  phần tử).

Tập  $\mathbf{N}^*$  và các tập có cùng lực lượng với nó gọi là các *tập đếm được*.

Tập  $\mathbf{R}$  và các tập có cùng lực lượng với nó gọi là những *tập không đếm được* (có vô số phần tử không đếm được).

BÀI TẬP : 1.25, 1.26.

## 1.7. ĐẠI SỐ TỔ HỢP

### 1.7.1. Hoán vị

Xét tập hữu hạn  $E$  có  $n$  phần tử :

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

**Định nghĩa 1.7.1.** Một hoán vị của  $E$  là tập gồm tất cả các phần tử của  $E$  xếp theo một thứ tự xác định.

Bản thân  $E$  cũng là một hoán vị của  $E$ , gọi là *hoán vị đồng nhất*.

Mỗi hoán vị của  $E$  ứng với một song ánh từ  $E$  lên  $E$  và ngược lại.

**Thí dụ 1.7.1.**  $E = \{x_1, x_2\}$

thì các hoán vị của  $E$  là  $\{x_1, x_2\}$  và  $\{x_2, x_1\}$ .

$$E = \{x_1, x_2, x_3\}$$

thì các hoán vị của  $E$  là

$$\begin{aligned} & \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_1\}, \{x_3, x_1, x_2\} \\ & \{x_3, x_2, x_1\}, \{x_1, x_3, x_2\}, \{x_2, x_1, x_3\} \end{aligned}$$

Ta thấy : Số các hoán vị của một tập có 2 phần tử là  $2 = 2!$  ; số các hoán vị của một tập có 3 phần tử là  $6 = 3!$ .

Người ta chứng minh được rằng số các hoán vị (khác nhau) của tập  $E$  có  $n$  phần tử là

$$P_n = n !$$

*Thí dụ 1.7.2.*  $P_{10} = 10 ! = 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.$

*Chú ý 1.7.1.* Vậy số song ánh của tập  $E$  có  $n$  phần tử lên chính nó hay số các song ánh giữa hai tập cùng có  $n$  phần tử là  $P_n.$

### 1.7.2. Chinh hợp lập

Xét  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  và tập  $B$  gồm  $p$  phần tử

$$B = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}.$$

**Định nghĩa 1.7.2.** Một chinh hợp lập chập  $p$  của  $E$  là một bộ phận gồm  $p$  phần tử không bắt buộc phải khác nhau lấy từ  $n$  phần tử của  $E$  rồi xếp theo một thứ tự xác định.

Mỗi chinh lập chập  $p$  của  $E$  ứng với một ánh xạ từ  $B$  đến  $E$  và ngược lại.

*Thí dụ 1.7.3.*  $E = \{x_1, x_2\}$  thì các chinh hợp lập chập 3 của các phần tử của  $E$  là

$$\{x_1 x_1 x_1\}, \{x_1 x_1 x_2\}, \{x_1 x_2 x_1\}, \{x_2 x_1 x_1\} \\ \{x_2 x_2 x_2\}, \{x_1 x_2 x_2\}, \{x_2 x_1 x_2\}, \{x_2 x_2 x_1\}.$$

Tất cả có  $8 = 2^3.$

Người ta chứng minh được rằng số chinh hợp lập chập  $p$  của một tập có  $n$  phần tử là  $n^p.$

Với  $n = 2, p = 3$  ta có  $2^3 = 8.$

*Chú ý 1.7.2.* Vậy số ánh xạ từ tập  $B$  có  $p$  phần tử đến tập  $E$  có  $n$  phần tử là  $n^p.$

### 1.7.3. Chinh hợp

Bây giờ xét các bộ phận gồm  $p$  phần tử khác nhau rút ra từ  $E$ , điều đó buộc  $p \leq n.$

**Định nghĩa 1.7.3.** Một bộ phận gồm  $p$  phần tử ( $p \leq n$ ) khác nhau lấy từ  $n$  phần tử của  $E$  rồi xếp theo một thứ tự xác định là một chỉnh hợp (không lặp) chập  $p$  của  $n$  phần tử của  $E$ .

Mỗi chỉnh hợp (không lặp) chập  $p$  của  $n$  phần tử của  $E$  ứng với một đơn ánh từ tập  $B$  có  $p$  phần tử tới  $E$  và ngược lại.

**Thí dụ 1.7.4.** Cho  $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $p = 2$ , ( $n = 3$ ) thì các chỉnh hợp chập 2 của 3 phần tử của  $E$  là

$$\{x_1 x_2\}, \{x_2 x_1\}, \{x_1 x_3\}, \{x_3 x_1\}, \{x_2 x_3\}, \{x_3 x_2\}$$

Có 6 tất cả.

Người ta chứng minh được rằng số các chỉnh hợp chập  $p$  ( $p \leq n$ ) của một tập hợp có  $n$  phần tử là

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \dots (n-p+1)$$

Với  $n = 3$ ,  $p = 2$  ta có  $A_3^2 = 6$ .

**Chú ý 1.7.3.** Vậy số đơn ánh từ một tập có  $p$  ( $p \leq n$ ) phần tử tới một tập có  $n$  phần tử là  $A_n^p$ .

#### 1.7.4. Tổ hợp

Xét tập  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $p \leq n$ .

**Định nghĩa 1.7.4.** Một bộ phận gồm  $p$  phần tử ( $p \leq n$ ) khác nhau lấy từ các phần tử của  $E$  (không kể thứ tự) gọi là một tổ hợp chập  $p$  của  $n$  phần tử của  $E$ .

**Thí dụ 1.7.5.** Cho  $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $p = 2$ , ( $n = 3$ ) thì các tổ hợp chập 2 của 3 phần tử của  $E$  là

$$\{x_1 x_2\}, \{x_1 x_3\}, \{x_2 x_3\}$$

Có 3 tất cả.

Gọi số các tổ hợp (khác nhau) chập  $p$  của một tập có  $n$  phần tử ( $p \leq n$ ) là  $C_n^p$ . Rõ ràng theo định nghĩa của tổ hợp và hoán vị ta có  $C_n^p = A_n^p / P_p$ .

Do đó

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!}$$

Chú ý rằng  $0! = 1$  theo quy ước.

Với  $n = 3, p = 2$  ta có  $C_3^2 = 3$ .

Chú ý 1.7.4. Từ biểu thức của  $C_n^p$  và với quy ước  $C_n^0 = 1$  ta suy ra (bạn đọc kiểm tra lại) :

$$C_n^{n-p} = C_n^p$$
$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

### 1.7.5. Nhị thức Newton

Xét 
$$(x+1)^n = \underbrace{(x+1)(x+1) \dots (x+1)}_{n \text{ thừa số}}$$

Rõ ràng

$$(x+1)^n = x^n + k_{n-1}x^{n-1} + k_{n-2}x^{n-2} + \dots + 1$$

Hệ số của  $x^p$  bằng số cách chọn  $p$  lần  $x$  trong  $n$  thừa số (mỗi thừa số là  $x+1$ ), số đó chính là số tổ hợp chập  $p$  của  $n$  phần tử, tức là bằng  $C_n^p$ . Vậy

$$(x+1)^n = x^n + C_n^{n-1}x^{n-1} + \dots + C_n^{n-p}x^{n-p} + \dots + 1$$

Thay  $x = \frac{a}{b}$  và chú ý đến  $C_n^{n-p} = C_n^p$  ta có

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^p a^{n-p} b^p + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Đó là công thức nhị thức Newton.

Với  $n = 2, 3$  ta thấy lại các công thức đã biết :

$$n = 2 \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$n = 3 \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

**Chú ý 1.7.5.** Về tam giác Pascal

Các hệ số của công thức nhị thức Newton viết được dưới dạng tam giác, gọi là *tam giác Pascal* :

$n = 1$	1	1					
$n = 2$	1	2	1				
$n = 3$	1	3	3	1			
$n = 4$	1	4	6	4	1		
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1

Số hạng ở hàng dưới bằng số hạng cùng cột ở hàng trên cộng với số hạng cùng hàng trên ở cột bên trái.

**BÀI TẬP :** 1.27, 1.28, 1.29, 1.30, 1.31, 1.32, 1.33.

## TÓM TẮT CHƯƠNG I

### Kí hiệu

- ⇒ kéo theo
- ⇔ tương đương
- ∀ với mọi
- ∃ tồn tại
- := định nghĩa bởi
- | sao cho

### Tập hợp và phần tử

Kí hiệu  $\in$ , đọc là thuộc :  $a \in A$

Tập rỗng  $\emptyset$

Tập bằng nhau :  $A = B$  nếu  $A$  và  $B$  trùng nhau

Bao hàm, tập con

$$A \subset B \Leftrightarrow ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

$$((A \subset B) \text{ và } (B \subset A)) \Leftrightarrow A = B$$

Hợp  $x \in A \cup B \Leftrightarrow ((x \in A) \text{ hoặc } (x \in B))$

Giao  $x \in A \cap B \Leftrightarrow ((x \in A) \text{ và } (x \in B))$

Hiệu  $x \in A - B \Leftrightarrow ((x \in A) \text{ và } (x \notin B))$

Bù  $A \subset E$  thì  $\bar{A} = E - A$

**Tích đề các**

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

**Một quan hệ hai ngôi  $\mathcal{R}$  trên  $E$  gọi là**

phản xạ nếu  $x\mathcal{R}x, \forall x \in E$

đối xứng nếu  $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

bắc cầu nếu  $(x\mathcal{R}y \text{ và } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

phản đối xứng nếu  $(x\mathcal{R}y \text{ và } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$

Quan hệ  $\mathcal{R}$  trên  $E$  gọi là *quan hệ tương đương* nếu nó phản xạ, đối xứng và bắc cầu, kí hiệu là  $\sim$ .

Tập tất cả các  $y \in E$  mà  $\sim x$  gọi là lớp tương đương của  $x$ .

Quan hệ  $\mathcal{R}$  trên  $E$  gọi là *quan hệ thứ tự* nếu nó phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu, thường kí hiệu là  $\leq$ .

Hai phần tử  $a$  và  $b$  của  $E$  gọi là so sánh được nếu

$$a\mathcal{R}b \text{ hay } b\mathcal{R}a$$

$\mathcal{R}$  là quan hệ thứ tự toàn phần nếu mọi cặp  $a$  và  $b$  của  $E$  đều so sánh được ;  $\mathcal{R}$  là quan hệ thứ tự bộ phận nếu chỉ có một số cặp  $a$  và  $b$  của  $E$  là so sánh được.

### Ánh xạ từ tập $E$ tới tập $F$

Đó là một quy luật  $f$  liên hệ giữa  $E$  và  $F$  sao cho ứng mỗi  $x \in E$  có một và chỉ một  $y \in F$ , viết  $f : E \rightarrow F$ .

$y$  gọi là *ảnh của  $x$* , còn  $x$  gọi là *ngịch ảnh của  $y$*  ; viết  $y = f(x)$  hay  $f(x) = y$  hay  $x \mapsto y$ .

*Đơn ánh* :  $f$  là đơn ánh nếu

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

*Toàn ánh* :  $f$  là toàn ánh nếu  $f(E) = F$ .

*Song ánh* :  $f$  là song ánh nếu  $f$  vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Nếu  $f$  là song ánh từ  $E$  tới  $F$ , nó tạo ra ánh xạ ngược  $f^{-1}$  từ  $F$  tới  $E$ . Một song ánh từ  $E$  tới  $F$  tạo ra một tương ứng 1 - 1 giữa  $E$  và  $F$ .

### Lực lượng của tập hợp

Hai tập hợp gọi là có cùng lực lượng nếu giữa chúng có một tương ứng 1-1. Tập  $\{1, 2, \dots, n\}$  và các tập cùng lực lượng với nó là các tập hữu hạn ; chúng cùng có  $n$  phần tử.

Tập  $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$  và các tập cùng lực lượng với nó là các tập đếm được.

Tập số thực  $\mathbf{R}$  và các tập hợp cùng lực lượng với nó là vô hạn không đếm được.

### Đại số tổ hợp

Số các ánh xạ từ một tập gồm  $p$  phần tử tới một tập gồm  $n$  phần tử bằng số các *chỉnh hợp lặp chập  $p$*  của  $n$  phần tử. Số đó là  $n^p$ .



Số các đơn ánh từ một tập hợp gồm  $p$  phần tử tới một tập gồm  $n$  phần tử bằng số các chỉnh hợp chập  $p$  của  $n$  phần tử. Số đó là

$$A_n^p = n(n-1) \dots (n-p+1)$$

Số các song ánh từ một tập gồm  $n$  phần tử lên chính nó bằng số các hoán vị của  $n$  phần tử. Số đó là

$$P_n = n!$$

Một bộ phận gồm  $p$  ( $p \leq n$ ) phần tử lấy từ  $n$  phần tử (không kể thứ tự) gọi là một tổ hợp chập  $p$  của  $n$  phần tử... Số tổ hợp đó là

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Ta có

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

### Nhị thức Newton

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} a^{n-p}b^p + \dots + b^n$$

## BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1. Dùng các kí hiệu đã học ở tiết 1.0 hãy viết các mệnh đề sau :

Định nghĩa – Tam giác  $ABC$  gọi là tam giác cân nếu nó có hai góc bằng nhau.

Định lí – Nếu tam giác  $ABC$  có hai cạnh bằng nhau thì nó là tam giác cân.

Định lí – Điều kiện cần và đủ để tam giác  $ABC$  cân là nó có hai cạnh bằng nhau.

**1.2.** Tìm tập các nghiệm của phương trình hay bất phương trình dưới đây và biểu diễn chúng trên trục số :

a)  $x^2 - 4x + 3 = 0$

b)  $x^2 - 4x + 3 > 0$

c)  $x^2 - 4x + 3 \leq 0$

d)  $x^2 - x + 1 = 0$

e)  $x^2 - x + 1 > 0$

f)  $x^2 - x + 1 \leq 0$

**1.3.** Tìm tập các nghiệm của hệ phương trình hay bất phương trình dưới đây và biểu diễn chúng trên mặt phẳng tọa độ :

a) 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$$

c)  $3x - y = 0$

d)  $3x - y > 0$

e)  $3x - y < 0$

**1.4.** Trong các trường hợp sau hỏi có  $A = B$  không ?

a)  $A$  là tập các số thực không âm,  $B$  là tập mọi số thực không nhỏ hơn trị tuyệt đối của chính nó ;

b)  $A$  là tập các số thực không âm,  $B$  là tập mọi số thực không lớn hơn trị tuyệt đối của chính nó ;

c)  $A$  là tập mọi số nguyên không âm và không lớn hơn 100 có tam thừa là một số lẻ không chia hết cho 3,  $B$  là tập các số nguyên không âm và không lớn hơn 100 có bình phương trừ 1 chia hết cho 24.

**1.5.**  $A, B, C$  là tập con của  $E$ . Chứng minh rằng nếu  $A \cup C \subset A \cup B$  và  $A \cap C \subset A \cap B$  thì  $C \subset B$ .

1.6.  $A$  là tập con của  $E$ . Hãy xác định các tập sau  $\overline{(\overline{A})}$  ;  $A \cap \overline{A}$  ,  $A \cup \overline{A}$  ,  $\overline{\emptyset}$  ,  $\overline{E}$ .

1.7.  $A, B$  là các tập con của  $E$ . Chứng minh

a) Nếu  $A \subset B$  thì  $\overline{B} \subset \overline{A}$ .

b) Nếu  $A$  và  $B$  rời nhau thì mọi phần tử của  $E$  sẽ thuộc  $\overline{A}$  hoặc thuộc  $\overline{B}$ .

c)  $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = E$

d)  $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$

e)  $\overline{A \cup B} = \overline{(\overline{A \cap B})}$

f)  $\overline{A \cap B} = \overline{(A \cup B)}$

1.8. Cho  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ .

Hãy viết ra tất cả các phần tử của  $A \times B$  và biểu diễn chúng thành các điểm trên mặt phẳng tọa độ.

1.9. Cho  $A = [1, 2] := \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$

$$B = [2, 3] := \{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$$

Hãy biểu diễn hình học tập tích  $A \times B$  trên mặt phẳng tọa độ.

1.10. Trong  $\mathbf{R}$ , quan hệ  $a \mathcal{R} b$  xác định bởi

$$"a^3 - b^3 = a - b"$$

có phải là quan hệ tương đương không? Tìm lớp tương đương  $\mathcal{C}(a, \mathcal{R})$ .

1.11. Trong tập các số tự nhiên, các quan hệ sau có phải là quan hệ tương đương không?

a)  $a$  chia hết cho  $b$  ;

b)  $a$  không nguyên tố với  $b$ .

1.12. a) Trong không gian hình học thông thường được coi như tập các điểm  $M, M', \dots$ , chứng minh rằng quan hệ " $M$  và  $M'$  ở trên một

đường thẳng cùng phương với đường thẳng  $D$  cho trước" là một quan hệ tương đương. Nêu đặc điểm của các lớp tương đương.

b) Cùng câu hỏi đó trong mặt phẳng với quan hệ " $M'$  là ảnh của  $M$  trong một phép quay quanh tâm  $O$  cho trước".

1.13. Trong tập các đường thẳng trong không gian quan hệ  $D \perp D'$  có phải là quan hệ tương đương không ?

1.14. Trong  $\mathbf{R}^2$ , hãy chứng minh quan hệ

$$(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x', y \leq y'$$

là quan hệ thứ tự. Nó có phải quan hệ thứ tự toàn phần không ? Nếu không, hãy xác định hai cặp  $(x, y)$  và  $(x', y')$  cụ thể không thỏa mãn cả  $(x, y) \leq (x', y')$  lẫn  $(x', y') \leq (x, y)$ .

1.15. Một kì thi có hai môn thi, điểm cho từ 0 đến 20. Mỗi thí sinh có hai điểm,  $x$  là điểm của môn thi thứ nhất,  $y$  là điểm của môn thi thứ hai. Trong tập các thí sinh, người ta xét tập các cặp điểm số  $(x, y)$  và xác định quan hệ hai ngôi  $\mathcal{R}$  như sau

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{hoặc } x_1 < x_2 \\ \text{hoặc } x_1 = x_2 \text{ và } y_1 \leq y_2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng  $\mathcal{R}$  là một quan hệ thứ tự toàn phần trên tập các thí sinh.

1.16. Các ánh xạ  $f: A \rightarrow B$  sau là đơn ánh, toàn ánh, song ánh ? Xác định ánh xạ ngược nếu có :

1)  $A = \mathbf{R}, B = \mathbf{R}, f(x) = x + 7$  ;

2)  $A = \mathbf{R}, B = \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$  ;

3)  $A = [4, 9], B = [21, 96], f(x) = x^2 + 2x - 3$  ;

4)  $A = \mathbf{R}, B = \mathbf{R}, f(x) = 3x - 2|x|$  ;

5)  $A = \mathbf{R}, B = (0, +\infty), f(x) = e^{x+1}$  ;

6)  $A = \mathbf{N}, B = \mathbf{N}, f(x) = x(x + 1)$ .

1.17. Các ánh xạ sau đây là loại ánh xạ gì ? Xác định ánh xạ ngược nếu có

- 1) Đối xứng đối với một điểm  $O$  ;
- 2) Tịnh tiến theo vectơ  $\vec{a}$  ;
- 3) Quay quanh tâm  $O$  một góc  $\theta$  trong mặt phẳng ;
- 4) Vị tự tâm  $O$  với tỉ số  $k \neq 0$ .

1.18. a) Cho ánh xạ  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  xác định bởi

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Nó có là đơn ánh ? là toàn ánh ?

Tìm ảnh  $f(\mathbf{R})$ .

b) Cho ánh xạ  $g: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$  xác định bởi  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

Tìm ảnh  $f \circ g$ .

1.19. Xét hai ánh xạ

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  xác định bởi  $f(x) = |x|$

$g: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$  xác định bởi  $x \mapsto \sqrt{x}$

So sánh  $f \circ g$  và  $g \circ f$ .

1.20. Cho 4 tập hợp  $A, B, C, D$  và ba ánh xạ

$$f: A \rightarrow B; \quad g: B \rightarrow C; \quad h: C \rightarrow D.$$

Chứng minh rằng

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

1.21. 1) Cho 2 tập  $E$  và  $F$  và ánh xạ  $f: E \rightarrow F$ .

$A$  và  $B$  là hai tập con của  $E$ . Chứng minh

a)  $A \subset B \Leftrightarrow f(A) \subset f(B)$  ;

b)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$  ;

c)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

2) Chứng minh rằng nếu  $f$  là đơn ánh thì

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

1.22. Cho 2 tập  $E$  và  $F$  và ánh xạ  $f: E \rightarrow F$ .

$A$  và  $B$  là 2 tập con của  $F$ , chứng minh

a)  $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ ;

b)  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ .

1.23. Cho  $f: E \rightarrow F$ ;  $g: F \rightarrow G$

Chứng minh rằng :

1) Nếu  $f$  và  $g$  là toàn ánh thì  $g \circ f$  là toàn ánh ;

Nếu  $f$  và  $g$  là đơn ánh thì  $g \circ f$  là đơn ánh ;

Nếu  $f$  và  $g$  là song ánh thì  $g \circ f$  là song ánh.

2) Nếu  $g \circ f$  là song ánh và  $f$  là toàn ánh thì  $f$  và  $g$  là song ánh.

1.24. Với mỗi bộ 4 số nguyên  $a, b, c, d$  sao cho  $ad - bc = 1$ , ta cho ánh xạ  $f: \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$  xác định bởi

$$f: (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$$

và gọi  $F$  là tập các ánh xạ như thế.

a) Chứng minh rằng  $f$  là song ánh và  $f^{-1} \in F$ .

b) Chứng minh rằng nếu  $f$  và  $g \in F$  thì  $f \circ g \in F$ .

1.25. 1) Chứng minh rằng hợp của hai tập hữu hạn là một tập hữu hạn.

2) Chứng minh rằng hợp của một số đếm được các tập hữu hạn là một tập đếm được.

1.26. Cho tập  $E$ , gọi  $\mathcal{P}(E)$  là tập tất cả các tập con của  $E$ . Chứng minh rằng  $\mathcal{P}(E)$  không cùng lực lượng với  $E$ .

1.27. Cho  $A = \{a, b\}$ . Có thể lập được bao nhiêu bảng khác nhau có dạng

	$a$	$b$
$a$	$\alpha$	$\beta$
$b$	$\gamma$	$\delta$

trong đó  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A$  ?

1.28. a) Có bao nhiêu số có 5 chữ số ?

b) Có bao nhiêu số có 5 chữ số mà các chữ số đều khác nhau ?

1.29. Tìm số tất cả các tập con của một tập gồm  $n$  phần tử, kể cả tập rỗng.

1.30. Cho các hoán vị  $P$  và  $Q$  của  $\{1\ 2\ 3\ 4\}$  :

$P = \{3\ 4\ 1\ 2\}$   $Q = \{2\ 4\ 1\ 3\}$  mà ta kí hiệu như sau :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tìm  $P \circ Q$ ,  $Q \circ P$ ,  $P^{-1}$  và  $Q^{-1}$ .

1.31. Cho  $n$  điểm khác nhau trong mặt phẳng sao cho ba điểm bất kì không thẳng hàng. Xét các đoạn thẳng nối từng cặp hai điểm khác nhau.

a) Tính số các đoạn thẳng đó.

b) Tính số các tam giác được tạo nên.

c) Ứng dụng cho các trường hợp riêng :

$$n = 3, n = 4, n = 5.$$

1.32. Chứng minh

a)  $1 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^p C_n^p = (-1)^p C_{n-1}^p$

b)  $\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$

c)  $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = 0.$

1.33. Tìm số hạng lớn nhất trong khai triển của nhị thức

$$(37 + 19)^{31}.$$

## ĐÁP SỐ

1.1. Tam giác cân := tam giác có hai góc bằng nhau

Tam giác có hai cạnh bằng nhau  $\Rightarrow$  tam giác cân

Tam giác có hai cạnh bằng nhau  $\Leftrightarrow$  tam giác cân

1.2. a)  $\{1, 3\}$ ; b)  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ ; c)  $[1, 3]$ ; d)  $\emptyset$ ; e)  $(-\infty, +\infty)$ ; f)  $\emptyset$ .

1.3. a)  $\{(2, 1)\}$ ; b)  $\{(x, y) \mid x \text{ tùy ý}, y = 3x - 2\}$  đường thẳng  $y = 3x - 2$

c)  $\{(x, y) \mid x \text{ tùy ý}, y = 3x\}$ .

đường thẳng  $y = 3x$ .

d)  $\{(x, y) \mid x \text{ tùy ý}, y < 3x\}$ .

Các điểm  $(x, y)$  nằm dưới đường thẳng  $y = 3x$ .

e)  $\{(x, y) \mid x \text{ tùy ý}, y > 3x\}$ .

Các điểm  $(x, y)$  nằm trên đường thẳng  $y = 3x$

1.4. a) Có; b) Không; c) Có.

1.6.  $\overline{(\overline{A})} = A$ ;  $A \cap \overline{A} = \emptyset$ ;  $A \cup \overline{A} = E$

$$\overline{\emptyset} = E, \overline{E} = \emptyset$$

1.8.  $\{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (1, 4), (3, 3), (3, 4)\}$ .

Các điểm có tọa độ như trên.

1.9. Hình chữ nhật có 4 đỉnh là  $(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)$ .

1.10. Có.

$|a| < 2 / \sqrt{3}$  và  $a \neq 1 / \sqrt{3}$  thì  $\mathcal{C}(a, \mathcal{A}) = \{a \text{ và hai nghiệm của phương trình } x^2 + ax + a^2 - 1 = 0\}$ .

$|a| = 2 / \sqrt{3}$ ,  $\mathcal{C}(a, \mathcal{A}) = \{a \text{ và nghiệm kép của phương trình trên}\}$ .

$|a| > 2 / \sqrt{3}$ ,  $\mathcal{C}(a, \mathcal{A}) = \{a\}$ .

$|a| = 1 / \sqrt{3}$ ,  $\mathcal{C}(a, \mathcal{A}) = \{a, -2a\}$ .

1.11. a) Không (vì không đối xứng).

b) Không (vì không bắc cầu).



1.12. a) Lớp tương đương gồm tất cả các đường thẳng cùng phương

b) Mỗi lớp tương đương là một đường tròn tâm O.

1.13. Không (vì không phản xạ và không bắc cầu).

1.14. Không phải quan hệ thứ tự toàn phần, chẳng hạn (1, 2) và (2, 1) không so sánh được.

1.16. 1) Đơn ánh, toàn ánh, song ánh,  $f^{-1}(y) = y - 7$ .

2) Không đơn ánh, không toàn ánh, không có ánh xạ ngược.

3) Đơn ánh, toàn ánh, song ánh  $f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{4 + y}$ .

4) Đơn ánh, toàn ánh, song ánh,  $f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y \geq 0 \\ \frac{1}{5}y, & y < 0 \end{cases}$

5) Đơn ánh, toàn ánh, song ánh  $f^{-1}(y) = \ln y - 1$

6) Đơn ánh ; không toàn ánh ; không song ánh ; không có ánh xạ ngược.

1.17. Tất cả đều là song ánh.

1) Ánh xạ ngược trùng với nó.

2) Ánh xạ ngược là tịnh tiến theo vectơ  $-\vec{a}$ .

3) Ánh xạ ngược là quay quanh tâm O một góc  $-\theta$ .

4) Ánh xạ ngược là vị tự tâm O với tỉ số  $\frac{1}{k}$ .

1.18. a)  $f$  không phải đơn ánh hay toàn ánh,  $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ ;

b)  $f \circ g = f$ .

1.19.  $f \circ g \neq g \circ f$ .

1.27. Đó là số các ánh xạ từ  $A^2$  tới A, tức là  $2^4 = 16$ .

1.28. a)  $9 \times 10^4$  số có 5 chữ số.

b)  $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$  số có 5 chữ số khác nhau.

1.29.  $2^n$ .

$$1.30. P \circ Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, Q \circ P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1.31. a) d = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$b) t = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

$$c) \text{ với } \begin{array}{lll} n = 3 & d = 3 & t = 1 \\ n = 4 & d = 6 & t = 14 \\ n = 5 & d = 10 & t = 10 \end{array}$$

$$1.33. C_{31}^{10} 37^{21} 19^{10}.$$

## Chương II

# CẤU TRÚC ĐẠI SỐ - SỐ PHỨC - ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC HỮU TỈ

### 2.1. LUẬT HỢP THÀNH TRONG TRÊN MỘT TẬP

#### 2.1.1. Khái niệm về luật hợp thành trong

**Định nghĩa 2.1.1.** Luật hợp thành trong trên tập  $E$ , hay phép toán trên  $E$ , là một quy luật khi tác động lên hai phần tử  $a$  và  $b$  của  $E$  sẽ tạo ra một và chỉ một phần tử cũng của  $E$ .

Nói cách khác, luật hợp thành trong trên tập  $E$  là một ánh xạ từ  $E \times E$  tới  $E$ .

Kí hiệu luật hợp thành trong trên tập  $E$  là  $*$  ta có

$$(a, b) \in E \times E \mapsto a * b \in E$$

hay

$$a, b \in E \mapsto a * b \in E$$

**Thí dụ 2.1.1.** Phép cộng (+) là một luật hợp thành trong trên các tập  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  :

$$(a, b) \in \mathbf{N} \mapsto a + b \in \mathbf{N}$$

$$(a, b) \in \mathbf{Z} \mapsto a + b \in \mathbf{Z}$$

$$(a, b) \in \mathbf{Q} \mapsto a + b \in \mathbf{Q}$$

$$(a, b) \in \mathbf{R} \mapsto a + b \in \mathbf{R}$$

**Thí dụ 2.1.2.** Phép nhân ( $\cdot$ ) là một luật hợp thành trong trên các tập  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  :

$$(a, b) \in \mathbf{N} \mapsto a.b \in \mathbf{N}$$

$$(a, b) \in \mathbf{Z} \mapsto a.b \in \mathbf{Z}$$

$$(a, b) \in \mathbf{Q} \mapsto a.b \in \mathbf{Q}$$

$$(a, b) \in \mathbf{R} \mapsto a.b \in \mathbf{R}$$

### 2.1.2. Tính chất của một luật hợp thành trong

Một luật hợp thành trong (\*) trên tập  $E$  có thể có một số tính chất sau :

1) *Tính kết hợp.* Ta nói luật hợp thành trong (\*) trên tập  $E$  có tính kết hợp nếu

$$\forall a, b, c \in E \text{ ta có } a * (b * c) = (a * b) * c$$

*Thí dụ 2.1.3.* Phép cộng (+) và phép nhân (.) trên các tập  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  có tính kết hợp vì

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

2) *Tính giao hoán.* Ta nói luật hợp thành trong \* trên tập  $E$  có tính giao hoán nếu

$$\forall a, b \in E \text{ ta có } a * b = b * a$$

*Thí dụ 2.1.4.* Phép cộng (+) và phép nhân (.) trên các tập  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  có tính giao hoán vì

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

3) *Phần tử trung hoà.* Ta nói luật hợp thành trong (\*) trên tập  $E$  có phần tử trung hoà là  $e$  nếu  $e \in E$  và

$$\forall a \in E \text{ ta có } a * e = e * a = a$$

*Thí dụ 2.1.5.* Phép cộng (+) trên các tập  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  có phần tử trung hoà là 0 vì ta luôn có

$$a + 0 = 0 + a = a$$

**Thí dụ 2.1.6.** Phép nhân ( $\cdot$ ) trên các tập  $\mathbf{N}, \mathbf{N}^*, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  có phần tử trung hoà là 1 vì ta luôn có

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

4) **Phần tử đối (hay đối xứng).** Xét tập  $E$  trên đó có luật hợp thành trong ( $*$ ) với phần tử trung hoà  $e$ . Xét phần tử  $a \in E$ . Phần tử  $a' \in E$  gọi là **phần tử đối của  $a$**  nếu

$$a * a' = a' * a = e$$

**Thí dụ 2.1.7.** Đối với phép cộng ( $+$ ) trên các tập  $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$  mọi phần tử  $a$  đều có phần tử đối là  $-a$  vì

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Riêng trên tập  $\mathbf{N}$ , thì  $-n \notin \mathbf{N}$ , cho nên mọi phần tử  $\neq 0$  của  $\mathbf{N}$  không có phần tử đối đối với phép cộng.

**Thí dụ 2.1.8.** Đối với phép nhân ( $\cdot$ ) trên các tập  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ , mọi phần tử  $a \neq 0$  đều có phần tử đối là  $\frac{1}{a}$ , còn viết là  $a^{-1}$ , vì  $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ .

Riêng trên  $\mathbf{Z}$  mọi phần tử  $a \neq 0$  và  $a \neq 1$  đều không có phần tử đối vì

$$a \in \mathbf{Z}, (a \neq 0, a \neq 1) \text{ thì } \frac{1}{a} \notin \mathbf{Z}.$$

Khi phép toán được đặt tên là phép nhân thì phần tử đối được gọi là **phần tử nghịch đảo**.

### 2.1.3. Khái niệm về cấu trúc đại số

Một tập có trang bị một hay nhiều luật hợp thành trong với những tính chất xác định tạo thành một trong những đối tượng toán học gọi là **cấu trúc đại số**.

Sau đây ta sẽ nghiên cứu các cấu trúc **nhóm**, **vành** và **trường** và đặc biệt là **trường số phức**.

Đó là các cấu trúc đại số thông dụng nhất.

## 2.2. CẤU TRÚC NHÓM

### 2.2.1. Định nghĩa nhóm

**Định nghĩa 2.2.1.** Tập  $G$  không rỗng có trang bị một luật hợp thành trong  $(*)$  kí hiệu là  $(G, *)$ . Cặp  $(G, *)$  được gọi là một nhóm nếu thoả mãn ba tính chất sau :

$G_1$  : Luật  $(*)$  có tính kết hợp.

$G_2$  : Luật  $(*)$  có phần tử trung hoà  $e$ .

$G_3$  : Mọi phần tử của  $G$  đều có phần tử đối.

Ba tính chất  $G_1, G_2, G_3$  còn gọi là các tiên đề của nhóm.

Nếu có thêm tính chất thứ tư :

$G_4$  : Luật  $(*)$  có tính giao hoán thì nhóm  $(G, *)$  gọi là nhóm giao hoán hay nhóm Abel.

**Chú ý 2.2.1.** Khi cặp  $(G, *)$  là một nhóm, nếu không sợ lầm lẫn ta cũng nói gọn :  $G$  là một nhóm.

**Thí dụ 2.2.1.** Căn cứ các kết quả ở mục 2.1.2 thì  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$  là những nhóm giao hoán.

### 2.2.2. Một số tính chất của nhóm

Dựa vào định nghĩa 2.2.1 có thể chứng minh được các tính chất sau :

1) Phần tử trung hoà  $e$  là duy nhất.

2) Phần tử đối  $a'$  của  $a$  là duy nhất.

3) Có quy tắc giản ước :

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y.$$

Áp dụng : Trên  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  có quy tắc giản ước

$$a + x = a + y \Rightarrow x = y$$

4) Trên  $G$  phương trình

$$a * x = b$$

có nghiệm duy nhất

$$x = a' * b$$

Áp dụng : Trên  $Z, Q, R$  phương trình

$$a + x = b$$

có nghiệm duy nhất

$$x = (-a) + b = b - a,$$

Ta thử chứng minh các kết luận trên.

1) Giả sử có hai phần tử trung hoà  $e$  và  $e'$ , nghĩa là

$$\forall a \in G \quad a * e = e * a = a,$$

$$a * e' = e' * a = a.$$

Xét tích  $e * e'$ . Vì  $e$  và  $e'$  đều là phần tử trung hoà nên ta có

$$e' = e' * e = e.$$

Ta suy ra  $e = e'$ .

2) Cho  $a \in G$ , giả sử có hai phần tử đối  $a'$  và  $a''$  nghĩa là có

$$a' * a = a * a' = e, \quad a'' * a = a * a'' = e.$$

Thế thì có

$$(a' * a) * a'' = e * a'' = a''$$

$$a' * (a * a'') = a' * e = a'$$

và suy ra

$$a' = a''.$$

3) Giả sử đã có

$$a * x = a * y.$$

Ta suy ra

$$a' * (a * x) = a' * (a * y)$$

$$(a' * a) * x = (a' * a) * y,$$

vậy

$$x = y.$$

4) Giả sử

$$a * x = b.$$

Ta suy ra

$$a' * (a * x) = a' * b$$

$$(a' * a) * x = a' * b$$

$$x = a' * b.$$

Ngược lại dễ thấy rằng  $x = a' * b$  thoả mãn phương trình đã cho.

BÀI TẬP : 2.1, 2.2, 2.3.

## 2.3. CẤU TRÚC VÀNH

### 2.3.1. Định nghĩa vành

**Định nghĩa 2.3.1.** Tập  $A$  không rỗng có trang bị hai luật hợp thành trong, luật thứ nhất gọi là luật cộng, viết là  $+$ , luật thứ hai gọi là luật nhân, viết là  $\cdot$ , kí hiệu là  $(A, +, \cdot)$ . Bộ ba  $(A, +, \cdot)$  được gọi là một vành nếu thoả mãn các tính chất sau :

A1 : Cặp  $(A, +)$  là một nhóm giao hoán (phần tử trung hòa thường được kí hiệu là 0).

A2 : Luật nhân  $(\cdot)$  có tính kết hợp.

A3 : Luật nhân  $(\cdot)$  có tính phân phối hai phía đối với luật cộng  $(+)$ , nghĩa là  $\forall a, b, c \in A$  ta có

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ (phân phối trái)}$$

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \text{ (phân phối phải)}$$

Khi  $(A, +, \cdot)$  là một vành và không sợ lẫn thì ta cũng nói  $A$  là một vành.

Vành  $(A, +, \cdot)$  gọi là vành giao hoán nếu có thêm tính chất thứ tư :

A4 : Luật  $(\cdot)$  có tính giao hoán.

**Thí dụ 2.3.1.** Các bộ ba  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$  là các vành giao hoán.

Ngoài ra nếu

Luật nhân  $(\cdot)$  có phần tử trung hoà, kí hiệu là 1, thì vành  $(A, +, \cdot)$  gọi là vành có đơn vị.

**Thí dụ 2.3.2.** Các vành  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$  là các vành có đơn vị, đơn vị đó là 1.



### 2.3.2. Vành nguyên

**Định nghĩa 2.3.2.** Vành nguyên là một vành  $(A, +, \cdot)$  trong đó có tính chất

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ hoặc } b = 0. \quad (2.3.1)$$

**Thí dụ 2.3.3.** Các vành  $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbf{R}, +, \cdot)$  là các vành nguyên.

Trong một vành bất kì ta có

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Trong vành nguyên ta còn có (2.3.1).

Vậy trong vành nguyên ta có

*Điều kiện cần và đủ để một tích bằng không là một trong hai nhân tử bằng không.*

BÀI TẬP : 2.4.

## 2.4. CẤU TRÚC TRƯỜNG

### 2.4.1. Định nghĩa trường

**Định nghĩa 2.4.1.** Gọi  $K$  là một tập không rỗng có trang bị hai luật hợp thành trong : luật cộng (+) và luật nhân ( $\cdot$ ). Ta nói  $(K, +, \cdot)$  hay  $K$  là một trường nếu thoả mãn các tính chất sau :

K1 :  $(K, +, \cdot)$  là một vành giao hoán có đơn vị.

K2 : Với mọi  $a \in K$ ,  $a \neq 0$  (phần tử trung hoà của luật +), thì tồn tại phần tử đối  $a'$  của  $a$  đối với luật nhân ( $\cdot$ ) nghĩa là

$$a \cdot a' = a' \cdot a = 1 \quad (a \neq 0).$$

$a'$  gọi là nghịch đảo của  $a$ , kí hiệu là  $a^{-1}$  hay  $\frac{1}{a}$ .

**Thí dụ 2.4.1.**  $\mathbf{R}$  và  $\mathbf{Q}$  với luật cộng (+) và nhân ( $\cdot$ ) thông thường là một trường.

### 2.4.2. Một số tính chất

1) Trường là một vành nguyên.

2)  $K$  là một trường thì  $K \setminus \{0\}$  là một nhóm đối với phép nhân.

Hệ quả. Trong một trường có quy tắc giản ước :

$$(a.b = a.c, a \neq 0) \Rightarrow b = c.$$

3) Trong một trường phương trình

$$a.x = b, a \neq 0$$

có nghiệm duy nhất

$$x = a^{-1} \cdot b = \frac{b}{a}.$$

BÀI TẬP : 2.5, 2.6, 2.7.

## 2.5. SỐ PHỨC

### 2.5.1. Mở đầu

Tập các số thực  $\mathbf{R}$  đã rất phong phú. Tuy nhiên nếu chỉ biết các số thực thì một phương trình đơn giản như

$$x^2 + 1 = 0 \text{ hay } x^2 = -1 \quad (2.5.1)$$

sẽ không có nghiệm vì không có số thực nào bình phương lên lại bằng  $-1$ .

Vì vậy ta phải xây dựng thêm những số mới gọi là *số phức*. Các số phức phải phong phú hơn các số thực để phương trình (2.5.1) có nghiệm đồng thời có thể xem số thực là trường hợp riêng của số phức.

### 2.5.2. Định nghĩa số phức

**Định nghĩa 2.5.1.** Khái niệm số phức mô tả bằng ba phát biểu sau :

**Phát biểu 1.** Số phức là một cặp số thực  $(a, b)$  :

$a \in \mathbf{R}$  là thành phần thứ nhất của số phức ;

$b \in \mathbf{R}$  là thành phần thứ hai của số phức ;

Tập tất cả các số phức kí hiệu là  $\mathbf{C}$ .

**Phát biểu 2** (về phép cộng và phép nhân số phức) :

Trong tập  $\mathbf{C}$  có hai luật hợp thành trong : luật cộng (+) và luật nhân (.) xác định như sau :

$\forall (a, b) \in \mathbf{C}, \forall (a', b') \in \mathbf{C}$  ta có :

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b').$$

$$(a, b).(a', b') := (aa' - bb', ab' + ba').$$

**Phát biểu 3** (về sự bằng nhau hai số phức) :

$$\forall (a, b) \in \mathbf{C}, \forall (a', b') \in \mathbf{C}$$

ta có  $(a, b) = (a', b')$  khi và chỉ khi  $a = a', b = b'$ .

**Thí dụ 2.5.1.**

$(2, 3)$  là một số phức

$(4, 5)$  là một số phức khác

$$(2, 3) + (4, 5) = (2 + 4, 3 + 5) = (6, 8).$$

$$(2, 3).(4, 5) = (2.4 - 3.5, 2.5 + 3.4) = (-7, 22)$$

### 2.5.3. Tập $\mathbf{C}$ là một trường

**Định lí 2.5.1.** Với hai luật cộng và nhân vừa định nghĩa, tập  $\mathbf{C}$  các số phức là một trường.

Định lí này có thể chứng minh bằng cách kiểm tra lại định nghĩa của trường căn cứ vào các định nghĩa hai luật cộng (+) và nhân (.) số phức ở trên ; việc này khá dài dòng, ta bỏ qua.

Vì  $\mathbf{C}$  là một trường nên khi tính toán về các số phức ta có thể áp dụng các tính chất của trường như tính giao hoán, tính kết hợp của luật cộng và luật nhân, tính phân phối của luật nhân đối với luật cộng.

Sau đây là một số nhận xét thêm :

1) Phần tử trung hoà của luật cộng (+) là số phức  $(0, 0)$  vì

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$$

$$(0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b)$$

2) Phần tử đối của số phức  $(a, b)$  đối với luật cộng là  $(-a, -b)$  vì

$$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$$

$$(-a, -b) + (a, b) = (-a + a, -b + b) = (0, 0)$$

Ta sẽ kí hiệu  $(-a, -b)$  là  $-(a, b)$  nghĩa là

$$-(a, b) := (-a, -b)$$

và gọi nó là *số phức đối* của số phức  $(a, b)$ .

3) Phần tử trung hoà của luật nhân  $(.)$  là số phức  $(1, 0)$  vì

$$(a, b).(1, 0) = (a.1 - b.0, a.0 + b.1) = (a, b)$$

$$(1, 0).(a, b) = (1.a - 0.b, 1.b + 0.a) = (a, b)$$

4) Phần tử đối của số phức  $(a, b) \neq (0, 0)$  đối với luật nhân  $(.)$  là

$$\left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

vì 1)  $(a, b) \neq (0, 0) \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$

$$2) (a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$$

$$\frac{a}{a^2 + b^2} \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot (a, b) = (1, 0)$$

Ta sẽ gọi phần tử

$$\left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

là nghịch đảo của  $(a, b)$  và kí hiệu là  $(a, b)^{-1}$ .

#### 2.5.4. Về kí hiệu $z = (a, b)$

Từ nay mỗi số phức  $(a, b)$  có thể kí hiệu bằng một chữ thôi, chữ  $z$  chẳng hạn, nghĩa là thay cho cặp  $(a, b)$  ta có thể chỉ viết chữ  $z$  :

$$z := (a, b)$$

Ngoài ra, luật nhân số phức hay thực cũng có thể viết không cần dấu chấm "." nữa, nghĩa là thay cho  $z.z'$  ta có thể viết  $zz'$  và thay cho  $a.a'$  ta viết  $aa'$  là đủ.

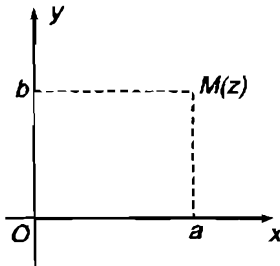
### 2.5.5. Mặt phẳng phức

Vì mỗi số phức  $z$  là một cặp số thực  $(a, b)$  nên ta có thể biểu diễn nó bằng một điểm  $M$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  (hình 12) sao cho  $M$  có tọa độ là  $a$  và  $b$ . Với cách đó ta có một tương ứng 1 - 1 giữa tập số phức  $\mathbb{C}$  và tập các điểm của mặt phẳng  $Oxy$ . Do đó mặt phẳng  $Oxy$  được gọi là *mặt phẳng phức*.

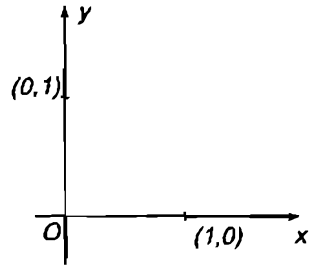
Điểm  $M$  có tọa độ là  $(a, b)$  gọi là *ảnh* của số phức  $z = (a, b)$ .

Số phức  $z$  gọi là *tọa vị* của điểm  $M$ .

Trong mặt phẳng phức số phức  $(0, 0)$  có ảnh là gốc tọa độ  $O$ , số phức  $(1, 0)$  và  $(0, 1)$  có những vị trí đặc biệt (hình 13).



Hình 12



Hình 13

### 2.5.6. Số thực là trường hợp riêng của số phức – Đơn vị thực

Mỗi số thực  $a$  ta biểu diễn bằng một điểm trên trục  $Ox$  nhận  $a$  làm hoành độ. Bây giờ ta xét các số phức có dạng  $(a, 0)$ , tức là các số phức có thành phần thứ hai bằng không. Ta nhận thấy (hình 14) :

a) Ảnh của mỗi số phức  $(a, 0)$  là một điểm ở trên  $Ox$ .

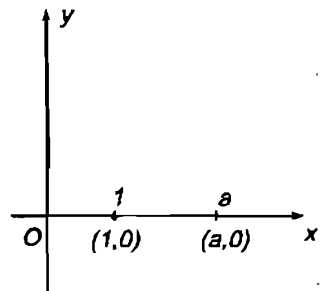
b) Ảnh của số phức  $(a, 0)$  trùng với điểm biểu diễn số thực  $a$ .

c) Ảnh của tổng hai số phức dạng  $(a, 0)$  :

$$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0)$$

trùng với điểm biểu diễn tổng của hai số thực  $a + a'$ .

d) Ảnh của tích hai số phức dạng  $(a, 0)$



Hình 14

$$(a, 0)(a', 0) = (aa', 0)$$

trùng với điểm biểu diễn tích của hai số thực  $aa'$ .

e) Nghịch đảo của số phức dạng  $(a, 0) \neq (0, 0)$  là  $(a^{-1}, 0)$ , nghịch đảo của số thực  $a \neq 0$  là  $a^{-1}$ . Vậy ảnh của nghịch đảo của số phức  $(a, 0) \neq (0, 0)$  trùng với điểm biểu diễn nghịch đảo của số thực  $a \neq 0$ .

Vì những lẽ trên ta đồng nhất số phức  $(a, 0)$  với số thực  $a$ , nghĩa là xem số phức  $(a, 0)$  là số thực  $a$  và viết

$$(a, 0) \equiv a, a \in \mathbf{R}$$

Với nghĩa đó ta nói : số thực là trường hợp riêng của số phức.

Sau đó

1) Số phức  $(1, 0)$  đồng nhất với 1 nên được gọi là đơn vị thực, ta cũng có  $(1, 0)(1, 0) = (1, 0)$  như  $1.1 = 1$ .

2) Ta có thể nhân số thực  $\lambda$  với số phức  $(a, b)$  như sau :

$$\lambda(a, b) = (\lambda, 0)(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

nghĩa là  $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbf{R}$

### 2.5.7. Số ảo thuần túy - Đơn vị ảo

Bây giờ xét các số phức có dạng  $(0, b)$ , ảnh của chúng nằm trên trục  $Oy$  của mặt phẳng phức (hình 15). Ta nhận thấy

$$(0, b)(0, b) = (-b^2, 0) \equiv -b^2$$

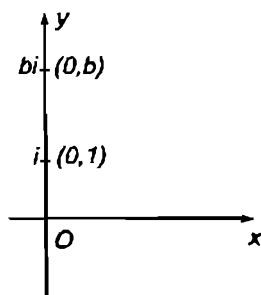
Vậy số phức  $(0, b)$  có bình phương luôn là một số âm (nếu  $b \neq 0$ ). Ta gọi chúng là số ảo thuần túy.

Đặc biệt số  $i = (0, 1)$  có bình phương

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$$

tức là  $i^2 = -1$

nên được gọi là đơn vị ảo.



Hình 15

Trục  $Oy$  dùng để biểu diễn các số ảo thuần túy  $(0, b)$  nên gọi là *trục ảo*. Còn trục  $Ox$  dùng để biểu diễn các số  $(a, 0) \equiv a$  thực nên gọi là *trục thực*.

### 2.5.8. Dạng chính tắc của số phức

Xét số phức  $z = (a, b)$ . Ta có

$$\begin{aligned} z &= (a, b) = (a, 0) + (0, b) \\ &= a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi. \end{aligned}$$

Vậy có

$$z = (a, b) = a + bi.$$

Dạng  $(a + bi)$  gọi là *dạng chính tắc* của số phức

$a$  gọi là *phần thực*, ta viết  $a = \text{Re}(z)$

$b$  gọi là *phần ảo*, ta viết  $b = \text{Im}(z)$ .

Với dạng chính tắc, các phép tính được thực hiện bằng cách sử dụng tính chất "C là một trường" và hệ thức  $i^2 = -1$  nghĩa là như trong các số thực với chú ý là  $i^2 = -1$ .

*Thí dụ 2.5.2.*

$$\begin{aligned} (2 + 3i)(4 - 5i) &= \\ &= 2 \cdot 4 - 2 \cdot 5i + 3i \cdot 4 - 3i \cdot 5i \\ &= 8 - 10i + 12i + 15 = 23 + 2i \end{aligned}$$

Với  $i^2 = -1$  ta suy ra

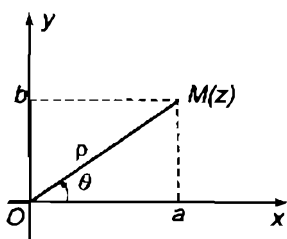
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = (i^2) \cdot (i^2) = (-1)(-1) = 1.$$

Một cách tổng quát ta có

$$i^{4p} = 1, \quad i^{4p+1} = i, \quad i^{4p+2} = -1, \quad i^{4p+3} = -i.$$

### 2.5.9. Dạng lượng giác của số phức

Trong mặt phẳng phức, số phức  $z = (a, b) = a + bi$  có ảnh là điểm  $M$  (hình 16).



Hình 16

Giả sử  $z \neq (0, 0)$ . Khi đó điểm  $M \neq$  gốc  $O$ . Ta đặt

$$OM = \rho,$$

và  $\theta = (\overline{Ox}, \overline{OM})$ ,

$\rho$  là một số thực dương, ta gọi nó là *môđun* của  $z$  và kí hiệu là  $|z|$ . Góc  $\theta$  được

xác định sai khác  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , gọi là *agumen* của  $z$  và kí hiệu là  $\text{Arg}(z)$ .

Chiếu vuông góc vectơ  $\overline{OM}$  lên hai trục  $Ox$  và  $Oy$  ta được

$$a = \rho \cos \theta, \quad b = \rho \sin \theta.$$

Do đó  $z = a + bi = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta$ .

Vậy có  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

gọi là *dạng lượng giác* của số phức.

Khi  $z = (0, 0)$  thì  $M \equiv O$ , ta có  $\rho = 0$ , agumen bất kì.

Ta suy ra :

1) *Điều kiện bằng nhau của hai số phức ở dạng lượng giác :*

Muốn cho hai số phức sau đây

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{và} \quad z' = \rho'(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

bằng nhau, điều kiện cần và đủ là

$$\rho' = \rho \quad \text{và} \quad \theta' = \theta + 2k\pi.$$

2) *Tích của hai số phức ở dạng lượng giác :*

Giả sử

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \quad z' = \rho'(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

Ta có

$$\begin{aligned} zz' &= \rho\rho'[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')] \\ &= \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]. \end{aligned}$$



Vậy

$$zz' \text{ có môđun là } \rho\rho' \text{ nghĩa là } |zz'| = |z| |z'|$$

có argumen là  $\theta + \theta'$  nghĩa là

$$\text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$$

Do đó 
$$z^2 = \rho^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

Một cách tổng quát ta có

$$z^m = \rho^m (\cos m\theta + i \sin m\theta), \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.5.2)$$

Ta cũng có

$$\frac{z}{z'} = \frac{|\rho|}{|\rho'|} [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')]$$

Vậy

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad \text{Arg} \left( \frac{z}{z'} \right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z')$$

### 2.5.10. Môđun của tổng

Trong mặt phẳng phức (hình 17) :

số phức  $z = a + bi$  có ảnh là điểm  $M(a, b)$

số phức  $z' = a' + b'i$  có ảnh là điểm  $M'(a', b')$

số phức  $z + z'$  có dạng

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i$$

nên có ảnh là điểm  $M''(a + a', b + b')$ .

Do đó

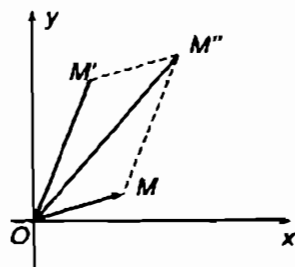
$$\overline{OM''} = \overline{OM} + \overline{OM'}$$

Trong tam giác  $OMM''$  ta có

$$OM = |z|, \quad MM'' = |z'|, \quad OM'' = |z + z'|$$

đồng thời

$$OM'' \leq OM + MM''$$



Hình 17

Do đó

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

### 2.5.11. Số phức liên hợp

Xét số phức  $z = a + bi$ . Số phức  $a - bi$  gọi là số liên hợp của  $z = a + bi$  và kí hiệu là  $\bar{z}$  :

$$\bar{z} = a - bi$$

Trong mặt phẳng phức, ảnh của  $\bar{z}$  là đối xứng của ảnh của  $z$  đối với trục thực  $Ox$  (hình 18).

Rõ ràng

$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$z + \bar{z} = 2a \in \mathbf{R}$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbf{R}$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2};$$

$$|\bar{z}| = |z|.$$

Đồng thời

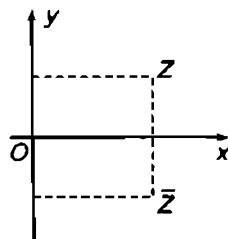
$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

Thí dụ 2.5.3  $(1 + i)(1 - i) = 2$

$$\frac{1}{2 - i} = \frac{2 + i}{5}.$$



Hình 18

### 2.5.12. Công thức Moivre

Xét số phức  $z = \cos\theta + i\sin\theta$ , tức là  $|z| = 1$ .

Áp dụng công thức (2.5.2) ta có

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$
$$n \in \mathbf{N}, n > 0$$

Công thức này gọi là công thức Moivre.

Thí dụ 2.5.4. Lấy  $n = 3$  ta có

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

Khai triển vế trái theo công thức nhị thức ta được

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta + 3\cos\theta i^2\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

hay

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

Hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau. Ta suy ra

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

Ta tiếp tục suy ra

$$\operatorname{tg} 3\theta = \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} = \frac{3\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^3\theta}{1 - 3\operatorname{tg}^2\theta}$$

*Chú ý 2.5.1.* Công thức Moivre đúng cả khi  $n$  nguyên bằng không và âm, nghĩa là nó đúng với mọi  $n \in \mathbf{Z}$ . (Đề nghị bạn đọc kiểm tra lại).

### 2.5.13. Căn bậc $n$ ( $n$ nguyên dương)

Hãy tính các căn bậc  $n$  của  $z$ . Ta xét phương trình  $z^n = a$ .

Giả sử

$$a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Vì  $z^n = a$  nên có

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Do đó

$$\rho^n = r, n\theta = \alpha + 2k\pi$$

Vậy

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n},$$

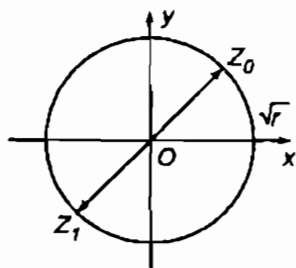
$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Ta suy ra :

Có  $n$  căn bậc  $n$  khác nhau của  $a \neq 0$  là

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], k = \overline{0, n-1} \quad (2.5.3)$$

Các ảnh của  $z_k$  là các đỉnh của một đa giác đều  $n$  cạnh nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$  bán kính  $\sqrt[n]{r}$ .



Hình 19

*Thí dụ 2.5.5.* Tính căn bậc 2 của  $a$ . Đó là (xem 2.5.3) :

$$z_0 = \sqrt{r} \left[ \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right].$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{r} \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\alpha}{2} + \pi \right) \right] \\ &= -\sqrt{r} \left[ \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right] = -z_0. \end{aligned}$$

Ảnh của  $z_0$  và  $z_1$  là hai điểm đối nhau trên đường tròn tâm  $O$  bán kính  $\sqrt{r}$ ,  $r = |a|$  (hình 19).

**Thí dụ 2.5.6.** Tính các căn bậc ba của 1.

Vì  $1 = \cos 0 + i \sin 0$  nên các căn bậc ba khác nhau của 1 là

$$z_k = \cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$k = 0, 1, 2.$$

Vậy có ba căn bậc ba khác nhau của 1 là

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ta chú ý rằng ta có

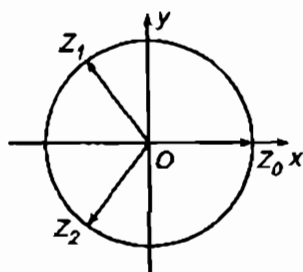
$$z_2 = z_1^2, \quad z_1 = z_2^2.$$

$$z_0 + z_1 + z_2 = 0.$$

$$1 + z_1 + z_1^2 = 0,$$

$$1 + z_2 + z_2^2 = 0.$$

Ảnh của  $z_0, z_1, z_2$  là các đỉnh của một tam giác đều trên đường tròn tâm  $O$  bán kính 1 (hình 20).



Hình 20

### 2.5.14. Giải phương trình bậc hai

Xét phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Ta đã biết rằng nếu  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  thì phương trình có 2 nghiệm thực khác nhau hay 1 nghiệm kép. Bây giờ ta xét trường hợp  $\Delta < 0$ .

Phương trình đã cho viết được ở dạng

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

hay 
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{i^2 \cdot (-\Delta)}{4a^2}, \quad -\Delta > 0.$$

Ta suy ra

$$x + \frac{b}{2a} = \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Vậy khi  $\Delta < 0$  phương trình bậc hai có hai nghiệm phức liên hợp

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

*Thí dụ 2.5.7.* Phương trình

$$x^2 + x + 1 = 0$$

có hai nghiệm

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Đặc biệt, phương trình  $x^2 + 1 = 0$  có hai nghiệm là  $i$  và  $-i$ .

BÀI TẬP : 2.8 – 2.33.

## 2.6. ĐA THỨC

### 2.6.1. Định nghĩa đa thức

**Định nghĩa 2.6.1.** Cho số nguyên  $n \geq 1$ .

Đa thức là hàm số có dạng

$$p(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

trong đó  $a_i$  là các hệ số nói chung  $\in \mathbb{C}$ .

Nếu biết  $a_n \neq 0$  ta nói  $p(x)$  có bậc  $n$ .

Nói chung, ta nói đa thức có bậc  $\leq n$ .

Nếu  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ ,  $a_0 \neq 0$ , thì ta sẽ nói rằng đa thức  $p(x)$  có bậc là 0 ( $p(x) = a_0$  ( $a_0 \neq 0$ )). Nếu  $a_0 = 0$  nữa, ta quy ước nói đa thức có bậc  $-\infty$ .

*Thí dụ 2.6.1.*  $x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  là một đa thức bậc 3.

$x^5 - x^3 - 4x$  là một đa thức bậc 5.

Đa thức là một dạng hàm đơn giản vì :

1) Việc tính giá trị của đa thức tại  $x = \alpha$  cụ thể chỉ cần thực hiện bằng các phép tính nhân và cộng :

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n,$$

2) Đa thức luôn có đạo hàm :

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1},$$

3) Đa thức luôn có nguyên hàm :

$$P(x) = c + a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

## 2.6.2. Chia đa thức theo lũy thừa giảm

*Thí dụ 2.6.2.* Ta muốn chia đa thức

$$p(x) := -6 + x - 7x^3 + x^5$$

cho đa thức  $q(x) := -1 - x + x^2 + x^3$ .

Ta sắp xếp lại các đa thức theo lũy thừa giảm

$$p(x) = x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 0x^2 + x - 6$$

$$q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

rồi tiến hành chia

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 0x^4 - 7x^3 + 0x^2 + x - 6 \\
 \underline{x^5 + x^4 - x^3 - x^2} \\
 -x^4 - 6x^3 + x^2 + x - 6 \\
 \underline{-x^4 - x^3 + x^2 + x} \\
 -5x^3 - 6 \\
 \underline{-5x^3 - 5x^2 + 5x + 5} \\
 5x^2 - 5x - 11
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r}
 x^3 + x^2 - x - 1 \\
 \hline
 x^2 - x - 5
 \end{array} \right.$$

Đến đây ta nhận thấy đa thức chia  $q(x)$  có bậc 3 mà đa thức dư  $5x^2 - 5x - 11$  có bậc 2,  $2 < 3$ , nên không tiếp tục chia nữa, ta dừng lại và viết kết quả

$$x^5 - 7x^3 + x - 6 = (x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - x - 5) + 5x^2 - 5x - 11$$

(giống như khi chia 13 cho 4 ta được  $13 = 4 \cdot 3 + 1$ ).

Nói chung khi chia một đa thức  $p$  bậc  $n$  cho một đa thức  $q$  bậc  $m$  ( $m \leq n$ ) theo luỹ thừa giảm, ta được một đa thức  $b$  có bậc bằng  $n - m$  và có phần dư là một đa thức  $r$  có bậc  $< m$ :

$$p = qb + r, \text{ bậc của } r < \text{bậc của } q$$

Khi  $r = 0$  thì ta nói  $p$  chia hết cho  $q$ .

### 2.6.3. Nghiệm của đa thức – Phân tích đa thức thành tích

**Định nghĩa 2.6.2.** Số  $\alpha$  gọi là nghiệm của đa thức  $p(x)$  nếu

$$p(\alpha) = 0$$

**Định lý 2.6.1.** Giả sử  $p(x)$  có bậc  $n \geq 1$ . Điều kiện cần và đủ để nó có nghiệm  $\alpha$  là nó chia hết cho  $x - \alpha$ :

$$p(x) = (x - \alpha)p_1(x) \quad (2.6.1)$$

trong đó  $p_1(x)$  là đa thức có bậc  $n - 1$ .

**Chứng minh :** Điều kiện đủ. Nếu  $p(x)$  có dạng (2.6.1) thì rõ ràng  $p(\alpha) = 0$ , do đó nó có nghiệm  $\alpha$ .



**Điều kiện cần.** Nếu  $p(x)$  có nghiệm  $\alpha$ , ta chia  $p(x)$  cho  $x - \alpha$  thì được

$$p(x) = (x - \alpha)p_1(x) + k$$

trong đó  $p_1(x)$  là đa thức có bậc  $n - 1$ , còn  $k$  là đa thức bậc  $< 1$ , tức là  $k = \text{hằng}$ .

Thay  $x = \alpha$  vào hai vế ta được  $k = p(\alpha) = 0$ .

Vậy  $p(x)$  chia hết cho  $x - \alpha$ .

Nếu  $p(x) = (x - \alpha)p_1(x)$ ,  $p_1(\alpha) \neq 0$ , thì  $\alpha$  được gọi là một nghiệm đơn của  $p(x)$ .

Nếu  $p(x) = (x - \alpha)^m p_1(x)$ ,  $p_1(\alpha) \neq 0$ ,  $m$  nguyên dương lớn hơn 1, thì  $\alpha$  gọi là một nghiệm bội  $m$  của  $p(x)$ .

**Định lí 2.6.2. (D'Alembert).** Mọi đa thức  $p(x)$  mà bậc  $n \geq 1$  đều có ít nhất một nghiệm (thực hay phức).

Đây là một định lí cơ bản của Đại số học. Ta thừa nhận nó mà không chứng minh.

Hệ quả quan trọng của nó là

**Định lí 2.6.3.** Mọi đa thức bậc  $n \geq 1$  có  $n$  nghiệm thực hoặc phức, đơn hoặc bội, mỗi nghiệm bội  $m$  tính  $m$  lần, đồng thời đa thức có phân tích thành tích các thừa số bậc nhất

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n), \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \quad (2.6.2)$$

**Chứng minh :** Theo định lí 2.6.2 (D'Alembert) thì  $p(x)$  có ít nhất một nghiệm  $\alpha_1$  thực hoặc phức. Do đó nó có dạng (2.6.1) :

$$p(x) = (x - \alpha_1)p_1(x)$$

trong đó  $p_1(x)$  có bậc là  $n - 1$ .

Nếu bậc của  $p_1(x) \geq 1$  thì cũng lập luận như trên ta lại có

$$p_1(x) = (x - \alpha_2)p_2(x)$$

trong đó  $p_2(x)$  có bậc là  $(n - 1) - 1 = n - 2$ , v.v.

Cuối cùng ta được  $p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)^k$  trong đó  $k$  là đa thức bậc  $< 1$ , nghĩa là  $k = \text{hằng}$ .

So sánh hệ số của  $x^n$  ở hai vế ta được  $k = a_n$ .

Một hệ quả của định lí 2.6.3 là

**Định lí 2.6.4.** Mọi đa thức bậc không lớn hơn  $n$  ( $n \geq 1$ ) không thể có quá  $n$  nghiệm (thực hoặc phức).

#### 2.6.4. Trường hợp đa thức có hệ số thực

Xét đa thức

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad a_n \neq 0$$

Thay  $x$  bằng  $z$  và  $\bar{z}$  ta có

$$P(x) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$$

$$P(\bar{z}) = a_0 + a_1\bar{z} + \dots + a_n(\bar{z})^n.$$

Vì  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

nên  $\overline{P(\bar{z})} = P(z)$ .

Nếu  $P(\alpha) = 0$  thì  $\overline{P(\alpha)} = \bar{0} = 0$ . Do đó  $P(\bar{\alpha}) = 0$ , nghĩa là nếu  $\alpha$  là nghiệm của  $P(x)$  thì  $\bar{\alpha}$  cũng là nghiệm của  $P(x)$ .

Giả sử  $P(x)$  có các nghiệm thực là  $c_1, c_2, \dots, c_r$  và các nghiệm phức không thực là  $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_2, \dots, \alpha_s, \bar{\alpha}_s$ .

Khi đó  $P(x)$  có dạng

$$P(x) = a_n(x - c_1) \dots (x - c_r)(x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1) \dots (x - \alpha_s)(x - \bar{\alpha}_s).$$

Xét số hạng  $(x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1)$  ta có

$$(x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1) = x^2 - (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)x + |\alpha_1|^2.$$

Đó là một tam thức bậc hai có hệ số thực (vì  $\alpha_1 + \bar{\alpha}_1 = 2\text{Re}(\alpha_1) \in \mathbf{R}$  và  $|\alpha_1|^2 \in \mathbf{R}$ ) nhưng không có nghiệm thực (vì nó đã có hai nghiệm phức là  $\alpha_1$  và  $\bar{\alpha}_1$ ). Vậy nó có dạng

$$x^2 + p_1x + q_1 \text{ với } p_1^2 - 4q_1 < 0.$$

Tóm lại ta có

**Định lí 2.6.5.** Đa thức  $P(x)$  bậc  $n$  ( $n \geq 1$ ) với hệ số thực có phân tích thành tích các thừa số bậc nhất thực và bậc hai thực :

$$P(x) = a_n(x - c_1) \dots (x - c_r)(x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s) \quad (2.6.3)$$

trong đó  $c_1, \dots, c_r$  là các nghiệm thực của  $P(x)$  còn các thừa số bậc hai không có nghiệm thực :

$$p_k^2 - 4q_k < 0, k = 1, 2, \dots, s$$

Đồng thời, vì theo định lí 2.6.3, số nghiệm là  $n$ , nên

$$r + 2s = n$$

**Chú ý 2.6.1.** Dạng (2.6.2) gọi là dạng nhân tử hoá của đa thức  $P(x)$  nói chung.

Dạng (2.6.3) gọi là dạng nhân tử hoá của đa thức  $P(x)$  với hệ số thực.

**Thí dụ 2.6.3.** Hãy nhân tử hoá đa thức

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

**Lời giải :** Ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 3x^2 + 2 - 3x(x^2 + 1) = \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 2) - 3x(x^2 + 1) \\ P(x) &= (x^2 + 1)(x^2 + 2 - 3x) \\ &= (x - 1)(x - 2)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

### 2.6.5. Đa thức đồng nhất không

**Định nghĩa 2.6.3.** Đa thức  $p(x)$  có bậc  $\leq n$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

gọi là đa thức đồng nhất không nếu  $p(x) = 0, \forall x$ .

Để biểu thị điều đó ta viết  $p(x) \equiv 0$ .

**Định lí 2.6.6.**  $p(x) \equiv 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i$ .

**Chứng minh :** Phần  $\Leftarrow$  : Giả sử  $a_i = 0, \forall i$ . Khi đó  $p(x)$  viết

$$p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$$

Vậy  $p(x) = 0, \forall x$ .

Bây giờ chứng minh phần  $\Rightarrow$  : Giả sử  $p(x) \equiv 0$ . Giả sử bậc của  $p(x)$  là  $m, m \leq n$ . Nếu  $m \geq 1$  thì theo định lí 2.6.4,  $p(x)$  có không quá  $m$  nghiệm. Nhưng ở đây nó lại có vô số nghiệm. Vậy bậc  $m$  của  $p(x)$  phải nhỏ hơn 1, nghĩa là  $p(x)$  có dạng  $p(x) = a_0$ , các  $a_i$  khác đều  $= 0$ . Hệ số  $a_0$  cũng phải  $= 0$  vì  $p(x) = 0, \forall x$ . Do đó

$$a_i = 0, \forall i$$

Đa thức đồng nhất 0 là đa thức không.

### 2.6.6. Các đa thức đồng nhất

**Định nghĩa 2.6.4.** Hai đa thức có bậc không lớn hơn  $n$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

gọi là đồng nhất nếu  $p(x) = q(x), \forall x$ .

Để biểu thị điều đó ta viết  $p(x) \equiv q(x)$ .

**Định lí 2.6.7.**  $p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i$

**Chứng minh :** Trước hết ta có

$$p(x) - q(x) = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n$$

Bây giờ ta có

$$p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow p(x) - q(x) \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow a_i - b_i = 0, \forall i \text{ (theo định lí 2.6.6)}$$

$$\Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i$$

**BÀI TẬP :** 2.34, 2.35, 2.36, 2.37.

## 2.7. PHÂN THỨC HỮU TỈ

### 2.7.1. Định nghĩa phân thức hữu tỉ

**Định nghĩa 2.7.1.** Phân thức hữu tỉ là tỉ số của hai đa thức  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $Q(x)$  khác đa thức 0.

*Chú ý 2.7.1.* Ta chỉ xét trường hợp các hệ số là thực.

### 2.7.2. Phân thức thực sự và phân thức không thực sự

**Định nghĩa 2.7.2.** Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì phân thức gọi là phân thức thực sự.

Nếu bậc của tử không nhỏ hơn bậc của mẫu thì phân thức gọi là phân thức không thực sự. Trong trường hợp phân thức là không thực sự bao giờ ta cũng có thể chia tử cho mẫu theo quy thừa giảm để được

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$$

trong đó  $E(x)$  là một đa thức có bậc bằng bậc của  $P$  trừ bậc của  $Q$  (gọi là *phần nguyên* của phân thức), còn  $\frac{S(x)}{Q(x)}$  là một phân thức mà bậc của tử  $S$  nhỏ hơn bậc của mẫu  $Q$ , nghĩa là  $S/Q$  là một phân thức thực sự.

*Thí dụ 2.7.1.* (xem thí dụ 2.6.2 ở mục 2.6.2).

$$\frac{x^5 - 7x^3 + x - 6}{x^3 + x^2 - x - 1} = x^2 - x - 5 + \frac{5x^2 - 5x - 11}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

### 2.7.3. Các phân thức (thực sự) đơn giản

Các phân thức có dạng

$$\frac{A}{(x - a)^m}, \quad m = 1, 2, \dots, a \in \mathbf{R}$$

gọi là các phân thức đơn giản loại một.

Các phân thức có dạng

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m}, \quad p^2 - 4q < 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

gọi là các phân thức đơn giản loại hai.

Chú ý rằng  $(x - a)^m$  có nghiệm thực đơn hoặc bội  $m$  là  $a$  còn  $(x^2 + px + q)^m$  không có nghiệm thực vì  $p^2 - 4q < 0$ .

Ngoài ra các phân thức đơn giản đều là các phân thức thực sự.

#### 2.7.4. Phân tích một phân thức thực sự thành tổng của các phân thức đơn giản

Giả sử phân thức thực sự có dạng

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a)^r (x^2 + px + q)^s}$$

Khi đó ta có công thức phân tích

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} = & \frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - a)^r} + \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_sx + N_s}{(x^2 + px + q)^s} \end{aligned}$$

trong đó  $A_1, A_2, \dots, A_r, M_1, N_1, \dots, M_s, N_s$  là các hằng số thực, có thể xác định được bằng cách quy đồng mẫu số rồi đồng nhất hai vế.

Nếu phân thức thực sự có dạng tổng quát

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1} \dots (x - a_r)^{\alpha_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{\beta_s}}$$

thì ta có công thức phân tích tổng quát trong đó mỗi thừa số loại một  $(x - a_j)^{\alpha_j}, \dots$ , ứng với một tổng các phân thức đơn giản loại một và mỗi thừa số loại hai  $(x^2 + p_jx + q_j)^{\beta_j}, \dots$ , ứng với một tổng các phân thức đơn giản loại hai như trong công thức phân tích ở trên.

*Thí dụ 2.7.2.* Hãy phân tích

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^4 + 2}{x(x^2 - 1)^2}$$

thành tổng các phân thức đơn giản.

*Lời giải.* Trước hết ta nhận xét bậc của  $P = 4$  nhỏ hơn bậc của  $Q = 5$ .

Vậy  $P/Q$  đã là phân thức thực sự.

Về  $Q$  ta có

$$Q = x(x^2 - 1)^2 = x(x - 1)^2(x + 1)^2$$

Do đó  $P/Q$  có dạng phân tích thành tổng

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^4 + 2}{x(x - 1)^2(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D}{x + 1} + \frac{E}{(x + 1)^2} \quad (2.7.1)$$

Để tính  $A, B, C, D, E$  có hai cách (nói chung).

Cách thứ nhất là cách cổ điển : ta quy đồng mẫu số, bỏ mẫu số chung rồi đồng nhất hai vế tức là cân bằng hệ số của cùng lũy thừa của  $x$  ở hai vế. Ta sẽ được một hệ phương trình tuyến tính đối với  $A, B, C, D, E$  ; giải hệ đó ta được  $A, B, C, D, E$ .

Quy đồng mẫu số và bỏ mẫu số chung ta được

$$\begin{aligned} x^4 + 2 &= A(x - 1)^2(x + 1)^2 + Bx(x - 1)(x + 1)^2 + \\ &+ Cx(x + 1)^2 + Dx(x + 1)(x - 1)^2 + Ex(x - 1)^2 \end{aligned}$$

Thực hiện phép nhân ở vế phải và rút gọn bằng cách đặt các lũy thừa của  $x$  thành thừa số chung ta được

$$\begin{aligned} x^4 + 2 &= A(x^4 - 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^3 - x^2 - x) + \\ &+ C(x^3 + 2x^2 + x) + D(x^4 - x^3 - x^2 + x) + \\ &+ E(x^3 - 2x^2 + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^4 + 2 &= x^4(A + B + D) + x^3(C + B + E - D) + \\
 &+ x^2(-2A + 2C - B - 2E - D) + \\
 &+ x(C - B + E + D) + A
 \end{aligned}$$

Hai đa thức ở hai vế bằng nhau với mọi  $x$ . Do đó ta cân bằng các hệ số của cùng lũy thừa của  $x$  ở hai vế (lũy thừa 4, 3, 2, 1, 0) ta được các phương trình đối với các ẩn  $A, B, C, D, E$  :

$$A + B + D = 1$$

$$C + B + E - D = 0$$

$$-2A + 2C - B - 2E - D = 0$$

$$C - B + E + D = 0$$

$$A = 2$$

Giải hệ này ta được :

Phương trình cuối cho  $A = 2$

Hai phương trình thứ hai và thứ bốn cho

$$B = D \text{ và } C = -E$$

Từ đó phương trình thứ nhất cho

$$B = D = -\frac{1}{2}$$

Sau đó phương trình thứ ba cho  $C = \frac{3}{4}$ .

Tiếp theo là  $E = -\frac{3}{4}$ .

Tóm lại ta thu được phân tích :

$$\frac{x^4 + 2}{x(x^2 - 1)^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{2(x - 1)} + \frac{3}{4(x - 1)^2} - \frac{1}{2(x + 1)} - \frac{3}{4(x + 1)^2}$$

Cách thứ hai : sử dụng một số nhận xét (mẹo).

Để tính  $A$  ta nhân hai vế của (2.7.1) với  $x$  rồi cho  $x \rightarrow 0$  ta được

$$A = 2.$$



Bây giờ ta nhận xét rằng  $P/Q$  là hàm lẻ, ta suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{A}{-x} - \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} - \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2} = \\ & = -\frac{A}{x} - \frac{B}{(x-1)} - \frac{C}{(x-1)^2} - \frac{D}{(x+1)} - \frac{E}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Do đó

$$D = B, \quad E = -C$$

Để tính  $C$  ta nhân hai vế của (2.7.1) với  $(x-1)^2$  rồi cho  $x \rightarrow 1$  ta được

$$3 = 4C \text{ tức là } C = \frac{3}{4}$$

Để tính  $B$  ta nhân hai vế của (2.7.1) với  $x$  rồi cho  $x \rightarrow +\infty$  ta được

$$1 = 2 + 2B, \text{ tức là } B = -1/2$$

Tóm lại, các kết quả thu được vẫn như trước.

**Thí dụ 2.7.3** Hãy phân tích

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^6 + 2}{(x^2 + 1)^2(x-1)}$$

thành tổng các phân thức tối giản.

*Lời giải:* Trước hết, vì bậc của tử là 6, bậc của mẫu là 5 nên  $P/Q$  là phân thức không thực sự. Ta chia tử cho mẫu theo lũy thừa giảm:

$$\frac{x^6 + 2}{(x-1)(x^2 + 1)^2} = x + 1 - \frac{x^4 - x^2 - 3}{(x-1)(x^2 + 1)^2}$$

Phân thức ở vế phải là thực sự. Ta phân tích nó:

$$\frac{x^4 - x^2 - 3}{(x-1)(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2}$$

Để tính  $A$  ta nhân hai vế với  $x-1$  rồi cho  $x \rightarrow 1$  ta được  $A = -3/4$ .

Sau đó ta có

$$\begin{aligned} S &:= \frac{Mx + N}{(x^2 + 1)} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 - x^2 - 3}{(x - 1)(x^2 + 1)^2} - \frac{A}{x - 1} \\ &= \frac{7x^3 + 7x^2 + 9x + 9}{4(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

vì  $A = -3/4$ .

Chia tử số cho  $(x^2 + 1)$  theo luỹ thừa giảm của  $x$  ta được

$$7x^3 + 7x^2 + 9x + 9 = (x^2 + 1)7(x + 1) + 2(x + 1)$$

Chia hai vế của đẳng thức này cho  $4(x^2 + 1)^2$  ta được

$$S = \frac{7}{4} \frac{x + 1}{(x^2 + 1)} + \frac{2}{4} \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Tóm lại

$$\frac{x^6 + 2}{(x - 1)(x^2 + 1)^2} = x + 1 + \frac{3}{4(x - 1)} - \frac{7x + 7}{4(x^2 + 1)} - \frac{x + 1}{2(x^2 + 1)^2}$$

Đề nghị bạn đọc giải bài tập ở thí dụ 2.7.3 bằng phương pháp cổ điển, nghĩa là quy đồng mẫu số, bỏ mẫu số chung, cân bằng hai vế rồi giải hệ phương trình đại số tuyến tính đối với  $A, B, C, D, E$ .

BÀI TẬP : 2.38.

## TÓM TẮT CHƯƠNG II

**Luật hợp thành trong**, hay còn gọi là **phép toán**, trên tập  $E$  là một ánh xạ từ  $E \times E$  tới  $E$ . Kí hiệu nó là  $(*)$  ta có

$$(a, b) \in E \times E \mapsto a * b \in E.$$

Tập  $G$  có một phép toán  $(*)$  gọi là một *nhóm* nếu thoả mãn các tính chất sau

(G1) Phép toán (\*) có tính *kết hợp*

(G2) Tồn tại *phần tử trung hoà* đối với phép (\*)

(G3) Tồn tại *phần tử đối* của mọi phần tử thuộc  $G$

Nếu thêm tính chất

(G4) Phép toán (\*) có tính *giao hoán* thì nhóm  $G$  gọi là nhóm *giao hoán* hay nhóm Abel.

Phần tử trung hoà và phần tử đối là *duy nhất*.

Nếu  $x * y = x * z$  thì  $y = z$ .

Tập  $A$  với hai phép toán gọi là một *vành* nếu  $A$  với phép toán thứ nhất tạo thành một nhóm giao hoán, đồng thời phép toán thứ hai có tính kết hợp và tính phân phối đối với phép toán thứ nhất.

Nếu phép toán thứ hai có tính giao hoán nữa thì vành  $A$  gọi là *vành giao hoán*

Nếu phép toán thứ hai có phần tử trung hoà nữa thì vành  $A$  gọi là *vành có đơn vị*

Tập  $K$  với hai phép toán gọi là một *trường* nếu nó là một vành giao hoán có đơn vị, đồng thời mọi phần tử khác phần tử trung hoà của phép toán thứ nhất đều có phần tử đối đối với phép toán thứ hai.

### Số phức

Mỗi số phức  $z$  xác định bởi một cặp số thực  $a$  và  $b$  :

$$z = (a, b)$$

Trong mặt phẳng phức số phức  $z$  biểu diễn bằng một điểm  $M$  có toạ độ là  $(a, b)$ . Dạng chính tắc của số phức :

$$z = a + bi$$

$a$  gọi là *phần thực* của  $z$  :  $a = \text{Re}(z)$

$b$  gọi là *phần ảo* của  $z$  :  $b = \text{Im}(z)$

$i = (0, 1)$  là một số ảo thuần túy có đặc điểm

$$i^2 = -1 \text{ tức là } i \text{ là một căn bậc hai của } -1.$$

Người ta gọi  $i$  là đơn vị ảo.

Số phức liên hợp của  $z$  là  $\bar{z} = a - bi$

Dạng lượng giác của số phức

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$\rho = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$  gọi là môđun của  $z$ , viết  $|z|$

$\theta = \text{góc } (\overline{Ox}, \overline{OM})$  gọi là argumen của  $z$ , viết  $\text{Arg}(z)$

Tích của hai số phức

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

là  $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

*Công thức Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

*Căn bậc  $n$*  của  $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$  là

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

**Đa thức**

Đa thức có dạng

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$\alpha$  là nghiệm của  $p(x)$  nếu  $p(\alpha) = 0$ .

**Định lí D'Alembert.** Mọi đa thức có bậc  $n \geq 1$  sẽ có ít nhất một nghiệm  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**Hệ quả.** Mọi đa thức có bậc  $n \geq 1$  sẽ có đủ  $n$  nghiệm

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  trong đó nghiệm bội  $m$  tính  $m$  lần.

Đồng thời đa thức có bậc  $n \geq 1$  thì có thể phân tích thành  $n$  thừa số bậc nhất

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

Mỗi đa thức bậc  $n \geq 1$ , có hệ số thực, có thể phân tích thành tích các thừa số bậc nhất thực và các thừa số bậc hai thực không có nghiệm thực, tức là

$$x^2 + px + q, p, q \text{ thực, } p^2 - 4q < 0.$$

Đa thức không là đa thức bằng 0 tại mọi  $x$ . Nó có dạng  $0 + 0x + \dots + 0x^n$ .

Ta còn viết  $p(x) \equiv 0$ . Ta có

$$p(x) \equiv 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i$$

**Hai đa thức đồng nhất.** Hai đa thức

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \text{ và}$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

gọi là hai đa thức đồng nhất nếu  $p(x) = q(x), \forall x$ .

Ta còn viết  $p(x) \equiv q(x)$ . Ta có

$$p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i.$$

### Phân thức hữu tỉ

Phân thức hữu tỉ là tỉ số của hai đa thức.

Phân thức gọi là thực sự nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu

Nếu  $P(x)/Q(x)$  là một phân thức không thực sự thì bằng cách chia tử cho mẫu theo lũy thừa giảm của  $x$  ta có

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

trong đó  $E(x)$  là một đa thức còn  $R(x)/Q(x)$  là một phân thức thực sự.

Một phân thức thực sự có thể phân tích thành tổng của các phân thức đơn giản loại một

$$\frac{A}{(x-a)^m}, A, a \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, m \geq 1$$

và các phân thức đơn giản loại hai

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}, B, C, p, q \in \mathbf{R}, p^2 - 4q^2 < 0, m \in \mathbf{Z}, m \geq 1.$$

## BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.1. Cho  $E = \{1, 2, 3\}$ ,  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  là các hoán vị của  $E$ .

1) Chứng minh rằng với luật hợp thành là tích các hoán vị thì tập hợp các hoán vị nói trên tạo thành một nhóm, kí hiệu là  $S_3$ .

2) Hỏi nhóm đó có giao hoán không ?

2.2. Gọi  $\mathbf{R}^* := \mathbf{R} - \{0\}$ . Xét các ánh xạ  $f_i : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}^*$  như sau

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = 1/x$$

$$f_3(x) = -x, \quad f_4(x) = -1/x$$

Với luật hợp thành  $*$  xác định bởi

$$f_i * f_j = f_i \cdot f_j$$

hãy chứng minh rằng các ánh xạ trên tạo thành một nhóm. Nhóm đó có giao hoán không ?

2.3. Cũng câu hỏi như ở bài tập 2.2 với  $\mathbf{R}^{**} = \mathbf{R} - \{0, 1\}$  và  $f_i : \mathbf{R}^{**} \rightarrow \mathbf{R}^{**}$  như sau :

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_3(x) = \frac{x-1}{x},$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x}, \quad f_5(x) = 1-x, \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$

2.4. Hỏi mỗi tập số sau đây với phép cộng số và phép nhân số có phải là một vành không ?

- 1) Tập các số nguyên ;
- 2) Tập các số nguyên chẵn ;
- 3) Các số hữu tỉ ;
- 4) Các số thực ;
- 5) Các số phức ;
- 6) Các số có dạng  $a + b\sqrt{2}$ ,  $a$  và  $b$  nguyên ;
- 7) Các số có dạng  $a + b\sqrt{3}$ ,  $a$  và  $b$  hữu tỉ ;

08.11.16

8) Các số phức có dạng  $a + bi$ ,  $a$  và  $b$  nguyên ;

9) Các số phức có dạng  $a + bi$ ,  $a$  và  $b$  hữu tỉ.

2.5. Hỏi mỗi tập số ở bài tập 2.4 trên có phải là một trường không ?

2.6. Chứng minh rằng phương trình  $x^2 + x - 1 = 0$  không có nghiệm hữu tỉ.

2.7. Cho  $a, b, c, d$  là các số hữu tỉ,  $\lambda$  là một số vô tỉ, chứng minh rằng :

$$(a + \lambda b = c + \lambda d) \Leftrightarrow (a = c \text{ và } b = d)$$

Ứng dụng : Viết số  $\sqrt{192 + 96\sqrt{3}}$  ở dạng

$$x + y\sqrt{3} \text{ với } x, y \text{ hữu tỉ.}$$

2.8. Chứng minh rằng

$$z = (1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i)$$

là một số thực.

2.9. Tìm  $x$  và  $y$  thực thỏa mãn

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$$

2.10. Cho  $a, b \in \mathbf{R}$ , hãy xác định  $x, y \in \mathbf{R}$  sao cho

$$(x + ai)(b + yi) = 4 + 3i$$

Biên luận theo  $a$  và  $b$ .

2.11. Hãy thực hiện các phép tính sau

a)  $\frac{1 + itg\alpha}{1 - itg\alpha}$  ;

b)  $\frac{a + bi}{a - bi}$  ;

c)  $\frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$

d)  $\frac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}$  ;

e)  $\frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$

2.12. Hãy tính

a)  $\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2$  ;

b)  $\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^3$  ;

**2.13.** Hãy tính các căn bậc hai của các số phức :

a)  $3 - 4i$ ;

b)  $-15 + 8i$ ;

c)  $-3 - 4i$ ;

d)  $-8 + 6i$ .

**2.14.** Giải phương trình

a)  $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$

b)  $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0$

**2.15.** Viết các số phức sau ở dạng lượng giác

a)  $1$ ;

b)  $-1$ ;

c)  $i$ ;

d)  $-i$ ;

e)  $1 + i$ ;

f)  $-1 + i$ ;

g)  $-1 - i$ ;

h)  $1 - i$ ;

i)  $1 + i\sqrt{3}$ ;

j)  $-1 + i\sqrt{3}$ ;

k)  $-1 - i\sqrt{3}$ ;

l)  $1 - i\sqrt{3}$ ;

m)  $2i$ ;

n)  $-3$ ;

o)  $\sqrt{3} - i$ ;

p)  $2 + \sqrt{3} + i$

**2.16.** Tìm dạng lượng giác của

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$$

Tính  $z^{100}$ .

**2.17.** Cho  $a = \cos\theta + i\sin\theta$ . Tính  $\frac{1-a}{1+a}$  theo  $\theta$ .

**2.18.** Xét hai số phức  $z_1$  và  $z_2$ . Tìm điều kiện về  $z_1$  và  $z_2$  để

a)  $z_1/z_2$  là thực ;

b)  $z_1/z_2$  là ảo thuần túy.

**2.19.** Hãy tìm biểu diễn hình học của các số phức  $z$  thỏa mãn

a)  $|z| < 2$ ;

b)  $|z - 1| \leq 1$ ;

c)  $|z - 1 - i| < 1$ .

**2.20.** Giải phương trình

a)  $|z| - z = 1 + 2i$ ;

b)  $|z| + z = 2 + i$ .





2.30. Hãy biểu diễn  $\cos^5 \theta$  và  $\sin^5 \theta$  theo  $\cos$  và  $\sin$  của các góc bội của  $\theta$ .

2.31. Viết nghiệm của phương trình

$$x^2 + x\sqrt{3} + 1 = 0$$

ở dạng lượng giác

2.32. Giải phương trình

$$z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$$

2.33. Giải phương trình

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

2.34. Hãy chia

a)  $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$  cho  $x^2 - 3x + 1$

b)  $x^3 - 3x^2 - x - 1$  cho  $3x^2 - 2x + 1$

c)  $x^4 + ix^3 - ix^2 + x + 1$  cho  $x^2 - ix + 1$

2.35. Tìm điều kiện để  $x^3 + px + q$  chia hết cho  $x^2 + mx - 1$ .

2.36. Tìm điều kiện để  $x^4 + px^2 + q$  chia hết cho  $x^2 + mx + 1$ .

2.37. Hãy phân tích thành tích các thừa số bậc nhất

a)  $x^4 - 2x^2 \cos \varphi - 1$ ;

b)  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ;

c)  $x^4 + 4$ ;

d)  $x^4 - 10x^2 + 1$

2.38. Hãy phân tích các phân thức sau thành tổng các phân thức đơn giản :

a)  $\frac{(x-1)^3}{x^2-4}$ ;

b)  $\frac{2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ ;

c)  $\frac{1}{x(x-1)^3}$ ;

d)  $\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$ ;

e)  $\frac{x^4+4}{x^4-4}$ ;

f)  $\frac{1}{x^6+1}$ ;

g)  $\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)}$ .

## ĐÁP SỐ

2.1. 1) Hãy lập bảng nhân và suy ra kết quả.

2) Nhóm không giao hoán.

2.2. Hãy lập bảng nhân và suy ra kết quả. Nhóm giao hoán.

2.3. Hãy lập bảng nhân và suy ra kết quả. Nhóm không giao hoán.

2.4. 1) Vành ; 2) Vành ; 3) Vành ; 4) Vành ; 5) Vành ; 6) Vành ;  
7) Vành ; 8) Vành ; 9) Vành.

2.5. 1) Không ; 2) Không ; 3) Trường ; 4) Trường ; 5) Trường ; 6) Không ;  
7) Trường ; 8) Không ; 9) Trường.

2.6.  $x = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$  ;  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{5} \in \mathbb{Q}$  : vô lí.

2.7.  $a - c = \lambda(d - b)$ ,  $d - b \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{Q}$  : vô lí.

Ứng dụng :  $(x + y\sqrt{3})^2 = 192 + 96\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 192 \\ 2xy = 96 \end{cases}$

$$x = 12, y = 4$$

2.8.  $z = 65$ .

2.9.  $x = -\frac{4}{11}$  ;  $y = \frac{5}{11}$ .

2.10.  $-1 < ab < 4$  : 2 nghiệm

$ab = -1$  hay  $ab = 4$  : 1 nghiệm

$ab < -1$  hay  $ab > 4$  : vô nghiệm

2.11. a)  $\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$  ; b)  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2abi}{a^2 + b^2}$  ;

c)  $\frac{44 - 5i}{318}$  ; d)  $\frac{1 - 32i}{25}$  ; e) 2.

2.12. a)  $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  ; b) 1.



2.19. a) Phần trong của đường tròn tâm O bán kính 2.

b) Phần trong và phần trên của đường tròn tâm (0, 1) bán kính 1.

c) Phần trong của đường tròn tâm (1, 1) bán kính 1.

2.20. a)  $z = \frac{3}{2} - 2i$  ;

b)  $z = \frac{3}{4} + i$  .

2.21. Ý nghĩa hình học : Tổng các bình phương của hai đường chéo của một hình bình hành bằng tổng các bình phương của các cạnh của hình bình hành đó.

2.22. a)  $2^{12}(1 + i)$  ;

b)  $2^9(1 - i\sqrt{3})$  ;

c)  $(2 - \sqrt{3})^{12}$  ;

d) -64.

2.23.  $2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right)$

2.24. Chứng tỏ rằng  $z = \cos\theta \pm i\sin\theta$  ;  $\frac{1}{z} = \cos\theta \mp i\sin\theta$  rồi dùng

công thức Moivre.

2.26. a)  $\frac{1}{12\sqrt{2}} \left( \cos \frac{24k + 19}{72} \pi + i \sin \frac{24k + 19}{72} \pi \right)$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

b)  $\frac{1}{16\sqrt{2}} \left( \cos \frac{24k + 5}{96} \pi + i \sin \frac{24k + 5}{96} \pi \right)$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

c)  $\frac{1}{12\sqrt{2}} \left( \cos \frac{24k + 5}{72} \pi + i \sin \frac{24k + 5}{72} \pi \right)$

2.27. a)  $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$

b)  $\cos^8 x - 28\cos^6 x \sin^2 x + 70\cos^4 x \sin^4 x - 28\cos^2 x \sin^6 x + \sin^8 x$

c)  $6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x$

d)  $7\cos^6 x \sin x - 35\cos^4 x \sin^3 x + 21\cos^2 x \sin^5 x - \sin^7 x$

$$2.28. \frac{2(3\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + 3\operatorname{tg}^5\varphi)}{1 - 15\operatorname{tg}^2\varphi + 15\operatorname{tg}^4\varphi - \operatorname{tg}^6\varphi}$$

2.29. Hãy biểu diễn  $1 + i$  ở dạng lượng giác.

$$2.30. \cos^5\theta = \frac{1}{2^4}(\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)$$

$$\sin^5\theta = \frac{1}{2^4}(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta)$$

$$2.31. \alpha = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{-\sqrt{3} - i}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$2.32. z' = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, z'' = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$2.33. 2\left[\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right], k = 0, 1, 2$$

$$\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

$$2.34. \text{a) } 2x^2 + 3x + 11 + \frac{25x - 5}{x^2 - 3x + 1};$$

$$\text{b) } \frac{3x - 7}{9} - \frac{26x - 2}{9(3x^2 - 2x + 1)};$$

$$\text{c) } x^2 + 2ix - 3 - i + \frac{(2 - i)x + 4 + i}{x^2 - ix + 1}$$

$$2.35. p = -q^2 - 1, m = q$$

$$2.36. 1) q = p - 1, m = 0$$

$$2) q = 1, m = \pm\sqrt{2 - p}.$$

$$2.37. a) \left( x - \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left( x + \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \times \\ \times \left( x - \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \left( x + \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$b) (x-1)(x-2)(x-3);$$

$$c) (x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i);$$

$$d) (x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

$$2.38. a) x-3 + \frac{1}{4(x-2)} + \frac{27}{4(x+2)};$$

$$b) \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1};$$

$$c) \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x};$$

$$d) -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)};$$

$$e) 1 + \frac{1}{x\sqrt{2}-2} - \frac{1}{x\sqrt{2}+2} - \frac{2}{x^2+2};$$

$$f) \frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{x\sqrt{3}+2}{6(x^2+x\sqrt{3}+1)} + \frac{-x\sqrt{3}+2}{6(x^2-x\sqrt{3}+1)};$$

$$g) \frac{x}{x^2+x+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x-1}{x^2+1}.$$

## Chương III

# MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

### 3.1. MA TRẬN

#### 3.1.1. Khái niệm ma trận

Khi ta có  $m \times n$  số ta có thể xếp thành một bảng chữ nhật chứa  $m$  hàng  $n$  cột. Một bảng số như thế gọi là một *ma trận*.

**Định nghĩa 3.1.1.** Một bảng số chữ nhật có  $m$  hàng  $n$  cột

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

gọi là một *ma trận* cỡ  $m \times n$ .

$a_{ij}$  là phần tử của ma trận  $A$  nằm ở giao điểm của hàng  $i$  cột  $j$ . Để kí hiệu ma trận người ta dùng hai dấu ngoặc vuông như ở trên hay hai dấu ngoặc tròn.

Để nói  $A$  là ma trận cỡ  $m \times n$  có phần tử nằm ở hàng  $i$  cột  $j$  là  $a_{ij}$  ta viết

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Khi  $m = n$ , bảng số thành vuông, ta có *ma trận vuông* với  $n$  hàng  $n$  cột, ta gọi nó là *ma trận cấp  $n$*  :



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  gọi là các phần tử chéo. Đường thẳng xuyên qua các phần tử chéo gọi là đường chéo chính.

Ma trận  $A$  cấp  $n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ còn viết } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó  $a_{ij} = 0$  nếu  $i > j$ , gọi là ma trận tam giác trên.

Ma trận cấp  $n$  :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ còn viết } \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó  $a_{ij} = 0$  nếu  $i < j$ , gọi là ma trận tam giác dưới.

Ma trận cấp  $n$  :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ còn viết } \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó  $a_{ij} = 0$  nếu  $i \neq j$  gọi là ma trận chéo.

Thi dụ 3.1.1. Bảng số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

là một ma trận cỡ  $2 \times 3$  với các phần tử

$$\begin{aligned}a_{11} &= 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3 \\ a_{21} &= 4, a_{22} = 5, a_{23} = 6.\end{aligned}$$

Bảng số

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

là ma trận cỡ  $3 \times 1$  với các phần tử

$$b_{11} = 1, b_{21} = 2, b_{31} = 3.$$

Bảng số

$$C = [4 \ 5 \ 6]$$

là ma trận cỡ  $1 \times 3$  với các phần tử

$$c_{11} = 4, c_{12} = 5, c_{13} = 6.$$

*Chú ý 3.1.1.* Sau đây chỉ xét chủ yếu các ma trận thực, tức là các ma trận với  $a_{ij} \in \mathbf{R}$ .

### 3.1.2. Ma trận không

**Định nghĩa 3.1.2.** Ma trận không là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng không.

Ma trận không kí hiệu là  $0$ .

*Thí dụ 3.1.2.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

là ma trận không cỡ  $2 \times 4$ .

### 3.1.3. Ma trận bằng nhau

**Định nghĩa 3.1.3.** Hai ma trận  $A$  và  $B$  gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử cùng vị trí bằng nhau, tức là

$$1) A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

$$2) a_{ij} = b_{ij} \text{ với mọi } i \text{ và mọi } j$$

Khi  $A$  bằng  $B$  ta viết  $A = B$ .

*Thí dụ 3.1.3*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

có nghĩa là  $a = 1, b = 2, c = 3, d = -4$ .

### 3.1.4. Cộng ma trận

1) **Định nghĩa 3.1.4.** Cho hai ma trận cùng cỡ  $m \times n$  :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

Tổng  $A + B$  là ma trận cỡ  $m \times n$  xác định bởi

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

tức là

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

*Thí dụ 3.1.4*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+7 \\ -1+2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2) **Tính chất.** Dễ thấy rằng

$$A + B = B + A$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Nếu gọi

$$-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$$

thì còn có

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

Nếu có thêm ma trận  $C$  với

$$C = [c_{ij}]_{m \times n}$$

thì

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

*Chú ý 3.1.2.* Gọi  $\mathcal{M}_{m \times n}$  là tập các ma trận cỡ  $m \times n$ . Khi đó  $(\mathcal{M}_{m \times n}, +)$  là một nhóm giao hoán.

### 3.1.5. Nhân ma trận với một số

**1) Định nghĩa 3.1.5.** Cho

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, k \in \mathbf{R}$$

thì tích  $kA$  là ma trận cỡ  $m \times n$  xác định bởi  $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$ .

Như vậy, muốn nhân một ma trận với một số ta nhân tất cả các phần tử của ma trận với số đó.

*Thí dụ 3.1.5.*

$$2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 14 & -4 \end{bmatrix}$$

**2) Tính chất.** Dễ thấy rằng

$$k(A + B) = kA + kB$$

$$(k + h)A = kA + hA$$

$$k(hA) = (kh)A$$

$$1 \cdot A = A$$

$$0 \cdot A = 0$$

### 3.1.6. Phép nhân ma trận với ma trận

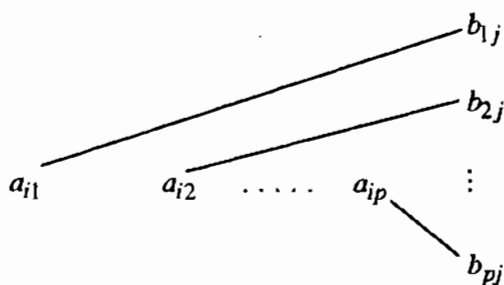
**Định nghĩa 3.1.6.** Xét hai ma trận

$$A = [a_{ij}]_{m \times p}, B = [b_{ij}]_{p \times n}$$

trong đó số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B. Người ta gọi tích AB là ma trận  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$  có m hàng n cột mà phần tử  $c_{ij}$  được tính bởi công thức

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} \quad (3.1.1)$$

Cách tính  $c_{ij}$  có thể hình dung bằng sơ đồ



và có thể nói tắt :

$c_{ij}$  bằng hàng  $i$  của A nhân với cột  $j$  của B.

Thí dụ 3.1.6.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} [1 \ 4]_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.4 \\ 2.1 & 2.4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$[1 \ 4]_{1 \times 2} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = [1.3 + 4.2]_{1 \times 1} = [11]_{1 \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.3 + 3.1 & 1.2 + 2.2 + 3.4 \\ 4.1 + 1.3 + 2.1 & 4.2 + 1.2 + 2.4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\ = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

*Chú ý 3.1.3.* Muốn nhân  $AB$  ( $A$  bên trái,  $B$  bên phải) phải có điều kiện : số cột của  $A$  bằng số hàng của  $B$ . Muốn nhân  $BA$  ( $B$  bên trái,  $A$  bên phải) phải có điều kiện : số cột của  $B$  bằng số hàng của  $A$ . Do đó khi nhân  $AB$  được chưa chắc đã nhân  $BA$  được. Trường hợp đặc biệt khi  $A$  và  $B$  là hai ma trận vuông cùng cấp thì nhân  $AB$  và  $BA$  đều được.

*Chú ý 3.1.4.* Khi nhân  $AB$  và  $BA$  được, chưa chắc đã có  $AB = BA$ .

*Thí dụ 3.1.7.* Cho

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

thì

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ở đây  $AB \neq BA$ .

*Chú ý 3.1.5.* Có những ma trận  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  mà  $AB = 0$  như

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

thì

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.1.7. Một số tính chất

Có thể chứng minh với giả thiết các phép tính viết ở dưới thực hiện được, ta có :

**Định lý 3.1.1.**

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$k(BC) = (kB)C = B(kC)$$

**Chú ý 3.1.6.** Với các phép tính cộng ma trận và nhân ma trận với ma trận ta có thể thấy rằng tập các ma trận vuông cùng cấp với hai phép toán đó tạo thành một vành không giao hoán.

### 3.1.8. Ma trận chuyển vị

**Định nghĩa 3.1.7.** Xét ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ . Đổi hàng thành cột, cột thành hàng ta được ma trận mới gọi là ma trận chuyển vị của  $A$ , ký hiệu là  $A^t$ .

Vậy có 
$$A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$$

Ta thấy rằng nếu  $A$  có  $m$  hàng  $n$  cột thì  $A^t$  có  $n$  hàng  $m$  cột.

**Thí dụ 3.1.8.**

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ thì } A^t = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

### 3.1.9. Chuyển vị của tích hai ma trận

Giả sử  $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ ,  $B = [b_{ij}]_{p \times n}$

Khi đó nhân  $AB$  được và  $AB$  có cỡ  $m \times n$ . Qua phép chuyển vị ta có

$$A^t = [a_{ji}]_{p \times m}, \quad B^t = [b_{ji}]_{n \times p}$$

Ta thấy rằng số cột của  $B^t$  bằng số hàng của  $A^t$ . Vậy nhân  $B^t A^t$  được và tích đó có cỡ  $n \times m$ .

**Định lý 3.1.2.**

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Xem chứng minh trong phần phụ lục cuối chương, mục 3.6.1.

**Thí dụ 3.1.9.**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 14 & 3 \end{bmatrix}, \quad (AB)' = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Vậy trong thí dụ này đúng là

$$(AB)' = B'A'.$$

**BÀI TẬP : 3.1 – 3.11**

## 3.2. ĐỊNH THỨC

### 3.2.1. Định thức của ma trận vuông

Xét ma trận cấp  $n$  :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ta chú ý đến phần tử  $a_{ij}$ , bỏ đi hàng  $i$  và cột  $j$  ta thu được ma trận chỉ còn  $n - 1$  hàng  $n - 1$  cột, tức là ma trận cấp  $n - 1$ . Ta kí hiệu nó là  $M_{ij}$  và gọi nó là *ma trận con* ứng phần tử  $a_{ij}$ .



Chẳng hạn, với

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ta có

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

**Định nghĩa 3.2.1.** Định thức của ma trận  $A$ , kí hiệu là  $\det(A)$ , được định nghĩa dần dần như sau :

$A$  là ma trận cấp 1 :

$$A = [a_{11}] \text{ thì } \det(A) = a_{11}$$

$A$  là ma trận cấp hai :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{thì } \det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(Chú ý rằng  $a_{11}$  và  $a_{12}$  là các phần tử nằm cùng ở hàng 1 của ma trận  $A$ ), vân vân, và một cách tổng quát,

$A$  là ma trận cấp  $n$  thì

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(M_{1n}) \quad (3.2.1)$$

(Chú ý rằng  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$  là các phần tử cùng nằm ở hàng 1 của ma trận  $A$ ).

Để kí hiệu định thức, người ta dùng hai gạch đứng đặt ở hai bên :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Định thức của ma trận cấp  $n$  gọi là *định thức cấp  $n$* .

*Thí dụ 3.2.1.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(45 + 48) - 2(-36 - 42) + 3(32 - 35) = 240$$

### 3.2.2. Tính chất của định thức

**Tính chất 1.**  $\det(A^t) = \det(A)$ .

*Hướng chứng minh.* Trước hết người ta chứng minh một công thức phụ :

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{21} \det(M_{21}) + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det(M_{n1}) \quad (3.2.2)$$

Sau đó áp dụng phương pháp quy nạp toán học (xem chứng minh chi tiết trong phần phụ lục cuối chương, mục 3.6.2).

*Thí dụ 3.2.2.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

**Hệ quả 3.2.1.** Một tính chất đã đúng khi phát biểu về hàng của định thức thì nó vẫn còn đúng khi trong phát biểu ta thay hàng bằng cột.

**Tính chất 2.** *Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của một định thức ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.*

Xem chứng minh trong phần phụ lục cuối chương, mục 3.6.3.

*Thí dụ 3.2.3.* Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2$$

Đổi chỗ hai hàng liên tiếp ta được

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 4.1 = 2 = -(-2)$$

**Tính chất 3.** *Một định thức có hai hàng (hay hai cột) như nhau thì bằng không.*

*Chứng minh.* Gọi định thức có hai hàng như nhau là  $\Delta$ . Đổi chỗ hai hàng đó ta được

$$\Delta = -\Delta$$

Vậy có  $2\Delta = 0$ , do đó  $\Delta = 0$ .

**Tính chất 4.** Dựa vào định nghĩa (3.2.1) và áp dụng tính chất 2 ta suy ra

$$\det(A) = (-1)^{i+1} [a_{i1} \det(M_{i1}) - a_{i2} \det(M_{i2}) + \dots \pm a_{in} \det(M_{in})] \quad (3.2.3)$$

Chú ý rằng các phần tử  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  đều nằm ở hàng  $i$  của định thức, nên công thức (3.2.3) có thể gọi là *khai triển của định thức theo hàng  $i$ .*

Dựa vào công thức (3.2.2) và tính chất 2 ta suy ra

$$\det(A) = (-1)^{1+j} [a_{1j} \det(M_{1j}) - a_{2j} \det(M_{2j}) + \dots \pm a_{nj} \det(M_{nj})] \quad (3.2.4)$$

Chú ý rằng các phần tử  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$  đều nằm ở cột  $j$  của định thức, nên công thức (3.2.4) có thể gọi là *khai triển của định thức theo cột  $j$ .*

**Thí dụ 3.2.4.** Xét

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

Ở thí dụ 3.2.1, ta dựa vào định nghĩa và đã tìm được  $\Delta = 240$ .

Bây giờ áp dụng khai triển định thức theo hàng 3 (3.2.3) ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^{3+1} \left\{ 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - (-8) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \right\} \\ &= 7(12-15) + 8(6+12) + 9(5+8) = 240 \end{aligned}$$

Áp dụng khai triển định thức theo cột 2 (3.2.4) ta cũng có

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^{1+2} \left\{ 2 \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-8) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} \right\} \\ &= -2(-36-42) + 5(9-21) + 8(6+12) = 240 \end{aligned}$$

**Tính chất 5.** Một định thức có một hàng (hay một cột) toàn là số không thì bằng không.

Đó là hệ quả của các công thức (3.2.3) và (3.2.4).

**Tính chất 6.** Khi nhân các phần tử của một hàng (hay một cột) với cùng một số  $k$  thì được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với  $k$ .

Đó là hệ quả của các công thức (3.2.3) và (3.2.4).

**Hệ quả 3.2.2.** Từ tính chất 6 ta suy ra nhận xét sau : Khi các phần tử của một hàng (hay một cột) có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

**Thí dụ 3.2.5.**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4.1 & 4.2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(4-3) = 4$$

**Tính chất 7.** Một định thức có hai hàng (hay hai cột) tỉ lệ thì bằng không.

Thật vậy, đưa hệ số tỉ lệ ra ngoài dấu định thức thì được một định thức có hai hàng (hay hai cột) như nhau nên nó bằng không.

**Tính chất 8.** Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức, chẳng hạn như

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} + a''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a''_{11} & a_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Đó là hệ quả của các công thức (3.2.3) và (3.2.4).

**Tính chất 9.** Nếu một định thức có một hàng (hay một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hay của các cột khác) thì định thức ấy bằng không.

Đó là hệ quả của tính chất 8 và 7.

**Tính chất 10.** Khi ta cộng bội  $k$  của một hàng vào một hàng khác (hay bội  $k$  của một cột vào một cột khác) thì được một định thức mới bằng định thức cũ.

Thí dụ 3.2.6.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 + (-2)2 & 5 + (-2)1 & 7 + (-2)3 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

**Chú ý 3.2.1.** Làm như trong thí dụ trên ta được một định thức mới bằng định thức cũ, nhưng lại có phần tử ở hàng 2 cột 1 bằng không.

Ta cũng có thể làm như thế với hàng thứ ba để biến phần tử ở hàng 3 cột 1 thành số không :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 6 + (-3)2 & 1 + (-3)1 & 5 + (-3)3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

Ta thấy định thức sẽ đơn giản đi.

**Tính chất II** (Về các định thức có dạng tam giác). Các định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

Cách chứng minh dựa vào khai triển (3.2.3) và (3.2.4).

Chẳng hạn, xét định thức cấp ba

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Khai triển theo cột 1 ta được

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Đ. B. 108.1

Sau đó tính định thức cấp hai bằng khai triển theo cột 1 của nó ta được

$$\Delta = a_{11} a_{22} a_{33}$$

Thí dụ 3.2.7.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 11 = 77$$

### 3.2.3. Cách tính định thức bằng biến đổi sơ cấp

Để tính một định thức, có thể dùng định nghĩa hoặc khai triển (3.2.3), (3.2.4), cũng có thể áp dụng các tính chất của định thức mà tìm cách biến đổi để đưa nó về các dạng đơn giản. Cách dùng các biến đổi sơ cấp là một trong những cách như thế.

Các biến đổi sơ cấp về hàng mà ta sẽ dùng được liệt kê ở bảng dưới đây

Biến đổi sơ cấp	Tác dụng	Lí do
(1) Nhân một hàng với một số $k \neq 0$	Định thức nhân với $k$	Tính chất 6
(2) Đổi chỗ 2 hàng	Định thức đổi dấu	Tính chất 2
(3) Cộng $k$ lần hàng $r$ vào hàng $s$	Định thức không đổi	Tính chất 10

Chú ý rằng :

(1) Nói nhân một hàng với một số  $k$  có nghĩa là nhân tất cả các phần tử của hàng đó với  $k$ .

(2) Nói cộng  $k$  lần hàng  $r$  vào hàng  $s$  nghĩa là cộng  $k$  lần mỗi phần tử ở hàng  $r$  với phần tử cùng cột với nó ở hàng  $s$  và đặt vào hàng  $s$ .

Bây giờ để tính một định thức ta làm như sau :

**Bước 1.** Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng tìm cách đưa dần định thức đã cho về dạng tam giác, nhớ ghi lại tác dụng của từng phép biến đổi sơ cấp được sử dụng.

**Bước 2.** Tính giá trị của định thức dạng tam giác thu được dựa vào tính chất 11 và kể đến tác dụng tổng hợp của các phép biến đổi sơ cấp đã sử dụng.

**Thí dụ 3.2.8.** Hãy tính

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

**Giải.** Ta có

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{đổi chỗ hai hàng 1 và 2}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{đưa thừa số 3 ở hàng 1 ra ngoài}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{cộng } -2 \text{ lần hàng 1 với hàng 3}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \quad \text{cộng } -10 \text{ lần hàng 2 với hàng 3}$$

$$= -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-55) = 165$$

**Chú ý 3.2.2.** Cũng có thể xét các biến đổi sơ cấp về cột và áp dụng chúng để tính định thức.

**BÀI TẬP :** 3.12 - 3.22.



### 3.3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

#### 3.3.1. Ma trận đơn vị

Gọi  $\mathcal{M}_n$  là tập các ma trận vuông cấp  $n$  :

$$\mathcal{M}_n = \{A\}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Định nghĩa 3.3.1.** Ma trận

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó các phần tử chéo bằng 1, các phần tử khác bằng không, gọi là ma trận đơn vị cấp  $n$ .

Đặc điểm của ma trận đơn vị  $I$  là :

$$AI = IA = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$$

**Thí dụ 3.3.1.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

#### 3.3.2. Ma trận khả đảo và ma trận nghịch đảo

**Định nghĩa 3.3.2.** Xét  $A \in \mathcal{M}_n$ . Nếu tồn tại ma trận  $B \in \mathcal{M}_n$  sao cho

$$AB = BA = I$$

thì nói  $A$  khả đảo và gọi  $B$  là ma trận nghịch đảo của  $A$ .

Khi  $A$  có nghịch đảo ta nói  $A$  không suy biến.

Người ta kí hiệu ma trận nghịch đảo của  $A$  là  $A^{-1}$ , nghĩa là có

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

*Thí dụ 3.3.2.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ thì } A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

vì  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3.3. Sự duy nhất của ma trận nghịch đảo

**Định lý 3.3.1.** Ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$  của  $A \in \mathcal{M}_n$  nếu có thì chỉ có một mà thôi.

*Chứng minh.* Giả sử  $B$  và  $C$  đều là ma trận nghịch đảo của  $A \in \mathcal{M}_n$ , nghĩa là có

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I$$

Từ  $AB = I$  ta suy ra

$$C(AB) = CI$$

$$(CA)B = C$$

$$IB = C$$

$$B = C$$

### 3.3.4. Sự tồn tại của ma trận nghịch đảo và biểu thức của nó

Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

09.11

Ở mục 3.2.1 ta đã gọi ma trận  $M_{ij}$  suy từ  $A$  bằng cách bỏ đi hàng  $i$  cột  $j$  là ma trận con ứng phần tử  $a_{ij}$ .

Bây giờ ta gọi

$$D_{ij} = \det(M_{ij}) \tag{3.3.1}$$

là định thức con ứng phần tử  $a_{ij}$ , và

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

là phụ đại số của phần tử  $a_{ij}$ .

Với các kí hiệu đó công thức (3.2.3) kết hợp với tính chất 3 của định thức cho

$$a_{k1}C_{i1} + a_{k2}C_{i2} + \dots + a_{kn}C_{in} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu } k = i \\ 0 & \text{nếu } k \neq i \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Kết hợp công thức (3.2.4) với tính chất 3 ta có

$$a_{1k}C_{1j} + a_{2k}C_{2j} + \dots + a_{nk}C_{nj} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu } k = j \\ 0 & \text{nếu } k \neq j \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Ta có

**Định lí 3.3.2.** Nếu  $\det(A) \neq 0$  thì ma trận  $A$  có nghịch đảo  $A^{-1}$  tính bởi công thức sau :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

*Chứng minh.* Nhân  $AC^t$  và áp dụng công thức (3.3.2) ta được

$$AC^t = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix}$$

Nhân  $C^t A$  và áp dụng công thức (3.3.3) ta cũng được như thế.

Vậy có

$$\frac{1}{\det(A)} \cdot AC' = \frac{1}{\det(A)} C'A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = I$$

và định lí được chứng minh

*Chú ý 3.3.1.* Khi  $\det(A) \neq 0$  thì  $A$  có nghịch đảo, nên  $A$  là ma trận không suy biến.

### 3.3.5. Cách tính ma trận nghịch đảo bằng phụ đại số

Áp dụng định lí 3.3.2 :

*Thí dụ 3.3.3.* Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$\det(A) = -1 \neq 0$$

$$C_{11} = 40 \quad C_{12} = -13 \quad C_{13} = -5$$

$$C_{21} = -16 \quad C_{22} = 5 \quad C_{23} = 2$$

$$C_{31} = -9 \quad C_{32} = 3 \quad C_{33} = 1$$

Do đó

$$C = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}C^t = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

*Thí dụ 3.3.4.* Xét ma trận cấp hai

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Với  $\det(A) = ad - bc \neq 0$  thì

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Vì

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

và do đó

$$C^t = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### 3.3.6. Ma trận nghịch đảo của tích hai ma trận

**Định lý 3.3.3.** Giả sử  $A$  và  $B \in \mathcal{M}_n$  là hai ma trận khả đảo. Khi đó  $AB$  cũng khả đảo và

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

*Chứng minh.* Ta có

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

Vậy  $AB$  khả đảo và  $B^{-1}A^{-1}$  là ma trận nghịch đảo của  $AB$ .

Ngoài ra ta còn có

**Định lí 3.3.4.** Nếu  $A \in \mathcal{M}_n$  khả đảo và có nghịch đảo  $A^{-1}$  thì

(a)  $A^{-1}$  cũng khả đảo và  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

(b)  $A^m$  cũng khả đảo và

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m, \quad m \text{ nguyên } > 0.$$

(c)  $\forall k \neq 0$  ta có  $kA$  cũng khả đảo và

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}.$$

### 3.3.7. Định thức của tích hai ma trận

**Định lí 3.3.5.** Nếu  $A$  và  $B$  là hai ma trận vuông cùng cấp thì có

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Xem chứng minh trong phần phụ lục cuối chương, mục 3.6.4.

*Thí dụ 3.3.5.* Cho

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

Đồng thời

$$\det(A) = 1, \quad \det(B) = -23, \quad \det(AB) = -23$$

Vậy đúng là

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

**3.3.8. Định lí 3.3.6.** Nếu  $A \in \mathcal{M}_n$  khả đảo tức là có nghịch đảo  $A^{-1}$  thì  $\det(A) \neq 0$ .

*Chứng minh.* Từ  $AA^{-1} = I$

ta áp dụng định lí 3.3.2 thì suy ra

$$\det(AA^{-1}) = \det(I)$$

$$\det(A) \det(A^{-1}) = 1$$

Vậy phải có  $\det(A) \neq 0$ . Cũng có  $\det(A^{-1}) \neq 0$ .

**3.3.9. Định lý 3.3.7.** 1) Nếu  $B$  là ma trận vuông cùng cấp với  $A$  sao cho  $BA = I$  thì  $A$  khả đảo và  $B = A^{-1}$ .

2) Nếu  $B$  là ma trận vuông cùng cấp với  $A$  sao cho  $AB = I$  thì  $A$  khả đảo và  $B = A^{-1}$ .

Chứng minh phần 1). Vì  $BA = I$  nên

$$\det(BA) = \det(I)$$

$$\det(B) \det(A) = 1$$

Do đó  $\det(A) \neq 0$ . Vậy  $A$  khả đảo và có nghịch đảo là  $A^{-1}$ . Nhân đẳng thức  $BA = I$  bên phải với  $A^{-1}$  ta có

$$(BA)A^{-1} = IA^{-1}$$

$$B(AA^{-1}) = A^{-1}$$

$$B = A^{-1}$$

Phần 2) Chứng minh tương tự.

BÀI TẬP : 3.23 – 3.28.

### 3.4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

#### 3.4.1. Dạng tổng quát của một hệ phương trình tuyến tính

Đó là một hệ  $m$  phương trình đại số bậc nhất đối với  $n$  ẩn số

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (3.4.1)$$

trong đó  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các ẩn số

$a_{ij}$  là hệ số ở phương trình thứ  $i$  của ẩn  $x_j$

$b_i$  là vế phải của phương trình thứ  $i$

Khi  $m = n$  ta có một hệ *vuông* với  $n$  phương trình  $n$  ẩn.

Khi các  $b_i = 0, \forall i$  ta có một hệ *thuần nhất*.

*Thí dụ 3.4.1*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 6 \end{cases}$$

là một hệ 2 phương trình 3 ẩn ;

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

là một hệ hai phương trình 2 ẩn ;

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$

là một hệ thuần nhất.

### 3.4.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ (3.4.1). Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

gọi là *ma trận hệ số* của hệ ; ma trận

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^t$$

gọi là *ma trận vế phải* (hay *cột vế phải*) của hệ ; ma trận





**Định lí 3.4.1.** (Định lí Cramer). Hệ Cramer có nghiệm duy nhất tính bằng công thức  $x = A^{-1}b$  tức là

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad (3.4.7)$$

trong đó  $A$  là ma trận (3.4.5),  $A_j$  là ma trận suy từ  $A$  bằng cách thay cột thứ  $j$  bởi cột vế phải  $b$ .

*Chứng minh.* Vì  $\det(A) \neq 0$  nên theo định lí 3.3.5,  $A$  có nghịch đảo :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

Thay trong (3.4.6)  $x$  bởi  $A^{-1}b$  ta có

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = b$$

Vậy  $x = A^{-1}b$  là nghiệm của hệ.

Sử dụng biểu thức của  $A^{-1}$  ở định lí 3.3.5 ta suy ra

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

nghĩa là có

$$x_j = \frac{C_{1j}b_1 + C_{2j}b_2 + \dots + C_{nj}b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Để chứng minh sự duy nhất của nghiệm ta giả sử hệ (3.4.6) có hai nghiệm là  $x$  và  $y$  :

$$Ax = b \quad Ay = b$$

Bằng phép trừ vế với vế ta được

$$Ax - Ay = 0$$

hay

$$A(x - y) = 0$$

Nhân hai vế với  $A^{-1}$  ta có

$$A^{-1}A(x - y) = A^{-1}0 = 0$$

$$(x - y) = 0$$

nghĩa là có  $x = y$ . Vậy hệ chỉ có một nghiệm.

*Thí dụ 3.4.2.* Giải hệ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

*Giải.* Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Vậy

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Ta tính được  $\det(A) = 44 \neq 0$

$$\det(A_1) = -40, \det(A_2) = 72, \det(A_3) = 152$$

Ta suy ra các nghiệm của hệ đã cho :

$$x_1 = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11}, \quad x_2 = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}, \quad x_3 = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

### 3.4.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng biến đổi sơ cấp

Xét hệ phương trình tuyến tính ở dạng phương trình (3.4.4) và ở dạng ma trận (3.4.6) trong đó  $A$  là ma trận (3.4.5).

a) Hệ tam giác trên. Đó là hệ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

với ma trận hệ số là một ma trận tam giác trên

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Với giả thiết  $a_{ii} \neq 0$ , việc giải nó từ dưới lên rất đơn giản : phương trình cuối cho ngay  $x_n$ , phương trình liền trên cho  $x_{n-1}$ , vân vân, phương trình đầu cho  $x_1$ .

b) Ta viết ma trận  $A$  và cạnh nó là vectơ  $b$ , ta được ma trận chữ nhật  $[A, b]$ . Ta áp dụng các biến đổi sơ cấp về hàng (xem 3.3.9) vào ma trận  $[A, b]$  để đưa dần ma trận  $A$  về dạng tam giác. Ta nhận thấy :

Phép biến đổi sơ cấp nhân một hàng với một số khác không ứng với phép nhân một phương trình của hệ với một số khác không, nó không làm thay đổi nghiệm của hệ.

Phép đổi chỗ hai hàng ứng với phép đổi vị trí của hai phương trình không làm thay đổi nghiệm của hệ.

Cuối cùng, phép cộng bội  $k$  của một hàng vào một hàng khác ứng với phép cộng bội  $k$  của một phương trình vào một phương trình khác cũng không làm thay đổi nghiệm của hệ.

Vậy hệ tam giác cuối cùng thu được tương đương với hệ đã cho. Giải hệ này – điều này không khó – từ dưới lên ta thu được nghiệm của hệ đã cho.

Thí dụ 3.4.3. Xét hệ

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Ta suy ra

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận  $A$  về dạng tam giác ta có

2	4	3	4
3	1	-2	-2
4	11	7	7
2	4	3	4
	-5	-6,5	-8
	3	1	-1
2	4	3	4
	-5	-6,5	-8
		-2,9	-5,8

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ tam giác trên

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -5x_2 - 6,5x_3 &= -8 \\ -2,9x_3 &= -5,8 \end{aligned}$$

Giải hệ tam giác trên này từ dưới lên ta thu được

$$x_3 = 2, x_2 = -1, x_1 = 1$$

Đó cũng là nghiệm của hệ đã cho.

Phương pháp vừa trình bày còn có tên là *phương pháp Gauss*.



Để cho đơn giản cách viết ta xét trường hợp ma trận cấp ba :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ta phải tìm ma trận

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

sao cho  $AB = I$  :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}^A \cdot \begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}}^{B_1} & \overbrace{\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix}}^{B_2} & \overbrace{\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix}}^{B_3} \end{matrix} = \begin{matrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{I_1} & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{I_2} & \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{I_3} \end{matrix}$$

Như vậy các cột  $B_1, B_2, B_3$  thỏa mãn

$$AB_1 = I_1, AB_2 = I_2, AB_3 = I_3$$

Đó là ba hệ đại số tuyến tính có chung ma trận hệ số là  $A$ . Ta sẽ giải chúng bằng phương pháp Gauss – Jordan trong cùng một bảng.

*Quy tắc thực hành* : Muốn tính ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$  của ma trận  $A$  bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng ta làm như sau :

1) Viết ma trận đơn vị  $I$  bên cạnh ma trận  $A$ .

2) Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa dần ma trận  $A$  về ma trận đơn vị  $I$ , tác động đồng thời phép biến đổi sơ cấp vào cột ma trận  $I$ .

3) Khi  $A$  đã được biến đổi thành  $I$  thì  $I$  trở thành ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$

90  
108  
108  
108  
108

Thí dụ 3.4.4. Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Toàn bộ quá trình tính toán có thể ghi tóm tắt thành một bảng như sau :

1	2	3	1	0	0	$L_1$
2	5	3	0	1	0	$L_2$
1	0	8	0	0	1	$L_3$
1	2	3	1	0	0	
0	1	-3	-2	1	0	$-2L_1 + L_2 \rightarrow L_2$
0	-2	5	-1	0	1	$-1L_1 + L_3 \rightarrow L_3$
1	2	3	1	0	0	
0	1	-3	-2	1	0	
0	0	-1	-5	2	1	$2L_2 + L_3 \rightarrow L_3$
1	2	3	1	0	0	
0	1	-3	-2	1	0	
0	0	1	5	-2	-1	$-1L_3 \rightarrow L_3$
1	2	0	-14	6	3	$-3L_3 + L_1 \rightarrow L_1$
0	1	0	13	-5	-3	$3L_3 + L_2 \rightarrow L_2$
0	0	1	5	-2	-1	
1	0	0	-40	16	9	$-2L_2 + L_1 \rightarrow L_1$
	1	0	13	-5	-3	
		1	5	-2	-1	

Vậy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$



### 3.4.7. Hệ thuần nhất (n phương trình n ẩn)

Xét hệ thuần nhất

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Ma trận hệ số vẫn là (3.4.5)

Hệ có dạng ma trận

$$Ax = 0 \quad (3.4.9)$$

Vế phải là ma trận không, cỡ  $n \times 1$ .

Hệ thuần nhất (3.4.8) tức là (3.4.9) luôn có nghiệm không :

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^t$$

vì khi thay  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$  vào vế trái của (3.4.8) thì các phương trình đó thỏa mãn.

Nghiệm không của hệ thuần nhất gọi là *nghiệm tầm thường* của nó.

Một câu hỏi đặt ra là : Khi nào hệ thuần nhất (3.4.8) có nghiệm không tầm thường. Ta có

**Định lí 3.4.2.** Hệ thuần nhất (3.4.8) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi  $\det(A) = 0$ .

*Chứng minh.* Nếu  $\det(A) \neq 0$  thì theo định lí 3.4.1 nó có nghiệm duy nhất, nên chỉ có nghiệm tầm thường.

Nếu  $\det(A) = 0$  thì bằng biến đổi sơ cấp về hàng và bằng cách đánh số lại các ẩn tức là đổi chỗ các cột ta có thể đưa ma trận  $A$  về dạng tam giác trên

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \dots & a'_{1n} \\ & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \dots & a'_{2n} \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \dots & a'_{rn} \\ & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

trong đó  $a'_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, r$ . Nếu  $r = n$  thì  $\det(A) = \pm a'_{11} \dots a'_{nn} \neq 0$ . Điều này trái giả thiết  $\det(A) = 0$ . Vậy  $r < n$ . Vế phải vẫn toàn là số không. Vậy hệ tam giác trên thuần nhất, tương đương với hệ đã cho, sẽ có số phương trình ít hơn số ẩn, nên nó có vô số nghiệm. Cho nên ngoài nghiệm tầm thường ra nó phải có nghiệm không tầm thường.

*Thí dụ 3.4.5.* Hệ

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

có định thức

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

nên chỉ có nghiệm tầm thường  $x_1 = 0, x_2 = 0$ .

Hệ 
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$

có định thức

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

nên có nghiệm không tầm thường chẳng hạn  $x_1 = 3, x_2 = -2$ . Thật ra hai phương trình đó chỉ là một. Cho  $x_1 = 3$  ta tìm ra  $x_2 = -2$ .

### Kết quả tóm tắt

Trong trường hợp  $m = n$ , ta có kết quả tóm tắt sau :

Các mệnh đề sau tương đương :

- (a)  $\det(A) \neq 0$ .
- (b)  $A$  khả đảo.
- (c) Hệ  $Ax = b$  có nghiệm duy nhất với mọi  $b$ .
- (d) Hệ  $Ax = 0$  chỉ có nghiệm tầm thường.

BÀI TẬP : 3.29 – 3.41.

## 3.5. HẠNG CỦA MA TRẬN – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT

### 3.5.1. Hàng của ma trận

Xét ma trận cỡ  $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Gọi  $p$  là một số nguyên dương không lớn hơn  $\min\{m, n\}$ .

**Định nghĩa 3.5.1.** Ma trận vuông cấp  $p$  suy từ  $A$  bằng cách bỏ đi  $m - p$  hàng và  $n - p$  cột gọi là ma trận con cấp  $p$  của  $A$ .

Định thức của ma trận con đó gọi là định thức con cấp  $p$  của  $A$ .

**Thí dụ 3.5.1.** Xét ma trận cỡ  $3 \times 4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ta có  $\min\{3, 4\} = 3$ , do đó  $p = 1, 2, 3$ .

Các định thức con cấp ba của  $A$  là

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Các định thức con cấp hai của  $A$  là

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \quad \text{v.v.}$$

**Định nghĩa 3.5.2.** *Hạng của ma trận  $A$  là cấp cao nhất của các định thức con khác không của  $A$ .*

Ta kí hiệu hạng của ma trận  $A$  là  $\rho(A)$ .

*Thí dụ 3.5.2.* Xét ma trận  $A$  ở thí dụ 3.5.1. Các định thức con cấp ba đều bằng không, nhưng có định thức con cấp hai khác không. Vậy  $\rho(A) = 2$ .

Vì với mọi ma trận vuông  $B$  ta có  $\det(B^t) = \det(B)$  nên có

*Chú ý 3.5.1.*  $\rho(A^t) = \rho(A)$ .

### 3.5.2. Cách tính hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp về hàng

a) Ma trận bậc thang : Đó là những ma trận có 2 tính chất :

1) Các hàng khác không (tức là có phần tử  $\neq 0$ ) luôn ở trên các hàng không (tức là có tất cả các phần tử  $= 0$ ).

2) Trên hai hàng khác không thì phần tử khác không đầu tiên ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở hàng trên. Chẳng hạn, các ma trận sau có dạng bậc thang :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ta thấy rằng ở ma trận  $A$ , định thức con khác không cấp cao nhất là 3, vậy  $\rho(A) = 3$ , nó bằng số hàng khác không của  $A$ , còn ở ma trận  $B$ , định thức con khác không cấp cao nhất là 2, vậy  $\rho(B) = 2$ , nó bằng số hàng khác không của  $B$ .

Nói chung ta có nhận xét sau :

*Chú ý 3.5.2. Hàng của một ma trận có dạng bậc thang bằng số hàng khác không của nó.*

b) Bây giờ vì các phép biến đổi sơ cấp về hàng (xem 3.3.2, 3.3.9) không làm thay đổi tính khác không hay bằng không của các định thức con của một ma trận, nên không thay đổi hạng của ma trận. Vì vậy ta có thể áp dụng chúng để đưa một ma trận về dạng bậc thang rồi áp dụng chú ý 3.5.2 mà suy ra hạng của ma trận đã cho.

*Thí dụ 3.5.3. Xét ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Các biến đổi sơ cấp về hàng cho

1	-3	4	2
2	1	1	4
-1	-2	1	-2
1	-3	4	2
0	7	-7	0
0	-5	5	0
1	-3	4	2
0	7	-7	0
0	0	0	0

Bảng số cuối cùng là một ma trận ở dạng bậc thang có hai hàng khác không. Vậy  $\rho(A) = 2$ .

### 3.5.3. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Bây giờ xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát (3.4.1). Ma trận hệ số của nó là ma trận  $A$  ở (3.4.2). Xét ma trận bổ sung tức là ma trận  $A$  thêm cột  $b$  :

$$\bar{A} = [A, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

**Định lí 3.5.1.** (Định lí Kronecker – Capelli). Hệ (3.4.1), tức là hệ  $Ax = b$ , có nghiệm khi và chỉ khi

$$\rho(\bar{A}) = \rho(A)$$

*Chứng minh.* Bằng các biến đổi sơ cấp về hàng và bằng cách đánh số lại các ẩn tức là đổi chỗ các cột ta đưa ma trận  $\bar{A}$  về dạng bậc thang :

$$\begin{array}{ccccccc}
a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \dots & a'_{2n} & & b'_2 \\
\vdots & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
a'_{rr} & a'_{rr+1} & \dots & a'_{rn} & & & & b'_r \\
& & & & & & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\
& & & & & & & & & 0 & b'_m
\end{array} \tag{3.5.1}$$

trong đó  $r \leq \min\{m, n\}$ . Từ đó ta suy ra định lí 3.5.1.

*Chú ý 3.5.3.* Từ định lí 3.5.1 ta suy ra :

$$\begin{array}{l}
\rho(\bar{A}) \neq \rho(A) \text{ thì hệ vô nghiệm} \\
\rho(\bar{A}) = \rho(A) = n \text{ thì hệ có nghiệm duy nhất} \\
\rho(\bar{A}) = \rho(A) < n \text{ thì hệ có vô số nghiệm.}
\end{array}$$

Giả sử  $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = r$ . Ta giải hệ (3.4.1) như sau :

Vì  $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = r$  nên tồn tại một định thức con khác 0 cấp  $r$  của  $A$ , ta gọi nó là *định thức con chính*. Các phần tử của định thức con chính nằm ở  $r$  phương trình, gọi là các *phương trình chính*, và là hệ số của  $r$  ẩn, gọi là  *$r$  ẩn chính*. Các ẩn còn lại gọi là *ẩn phụ*. Cả hệ tương đương với hệ mới gồm  $r$  phương trình chính, gọi là *hệ con chính*. Trong hệ con chính ta chuyển các ẩn phụ sang về phải, ta được một hệ con có  $r$  phương trình đối với  $r$  ẩn chính. Giải hệ con đó đối với các ẩn chính ta được nghiệm của hệ phụ thuộc về phải và các ẩn phụ. Khi  $r = n$  thì không có ẩn phụ.

Nếu đã đưa được ma trận  $\bar{A}$  về dạng bậc thang (3.5.1) thì nên lấy định thức con chính là

$$\left| \begin{array}{cccc}
a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} \\
& a'_{22} & \dots & a'_{2r} \\
& & \dots & \\
& & & a'_{rr}
\end{array} \right|$$

Khi đó hệ con chính là một hệ tam giác trên, dễ giải.

*Thí dụ 3.5.4.* Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases} \quad (3.5.2)$$

- 1) Hãy xác định  $a$  và  $b$  để hệ có nghiệm duy nhất.
- 2) Xác định  $a$  và  $b$  để hệ có vô số nghiệm.
- 3) Xác định  $a$  và  $b$  để hệ vô nghiệm.

*Giải.* Xét các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & -a \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{bmatrix}$$

Ta có 
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & -1 & -a \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2a - 21$$

1) Điều kiện cần và đủ để hệ đã cho (3.5.2) có nghiệm duy nhất là  $\det(A) \neq 0$ . Vậy đáp số của câu hỏi 1) là  $a \neq 21/2$ , còn  $b$  bất kì.

2) Từ kết luận trên ta suy ra: muốn cho hệ (3.5.2) có vô số nghiệm, trước hết phải có  $a = 21/2$ .

Khi đó  $\det(A) = 0$  nên  $\rho(A) < 3$ . Vì  $A$  có định thức con

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0$$

là định thức cấp 2 nên  $\rho(A) = 2$  khi  $a = 21/2$ . Theo định lí 3.5.1 (Kronecker - Capelli), muốn cho hệ có nghiệm cần và đủ là  $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = 2$ . Ta hãy tính  $\rho(\bar{A})$  khi  $a = 21/2$  bằng biến đổi sơ cấp. Ta có



$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 21/2 & 3 \\ 3 & -1 & -21/2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2L_1 \rightarrow L_1 \\ 2L_2 \rightarrow L_2}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 6 & -2 & -21 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-3L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -L_1 + L_3 \rightarrow L_3}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 0 & -14 & -84 & -14 \\ 0 & -3 & -18 & b-6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{14}L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & -18 & b-6 \end{bmatrix} \xrightarrow{3L_2 + L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 21 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-3 \end{bmatrix}$$

Qua bảng cuối cùng này ta thấy rằng số hàng khác không của  $A$  là 2, phù hợp với kết quả  $\rho(A) = 2$  khi  $a = 21/2$ . Số hàng khác không của  $\bar{A}$  phụ thuộc  $b$ . Nó là 2 nếu  $b = 3$  và là 3 nếu  $b \neq 3$ . Vậy có

$$\rho(\bar{A}) = \rho(A) = 2 \text{ khi } a = 21/2, \quad b = 3$$

$$\rho(\bar{A}) \neq \rho(A) \quad \text{khi } a = 21/2, \quad b \neq 3$$

Khi  $\rho(\bar{A}) = \rho(A) = 2 < 3$  thì hệ đã cho tương đương với một hệ 2 phương trình 3 ẩn.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{21}{2}x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - \frac{21}{2}x_3 = 2 \end{cases}$$

nên nó có vô số nghiệm.

Tóm lại (xem thêm chú ý 3.5.3) :

- $a \neq 21/2$                       thì hệ có nghiệm duy nhất
- $a = 21/2, b \neq 3$               thì hệ vô nghiệm
- $a = 21/2, b = 3$               thì hệ có vô số nghiệm

### 3.6. PHỤ LỤC

**3.6.1. Chứng minh định lý 3.1.2 :** Cho hai ma trận  $A$  và  $B$  sao cho có thể nhân  $AB$ . Khi đó ta có

$$(AB)' = B' A' \quad (3.6.1)$$

*Chứng minh.* Xét

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n \times p}$$

thì có thể nhân  $AB$  và

$$AB = C = [c_{ij}]_{m \times p} \quad \text{trong đó } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Khi đó ta có

$$A' = [a'_{ij}]_{n \times m} \quad \text{trong đó } a'_{ij} = a_{ji}$$

$$B' = [b'_{ij}]_{p \times n} \quad \text{trong đó } b'_{ij} = b_{ji}$$

$$C' = [c'_{ij}]_{p \times m} \quad \text{trong đó } c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

Do đó có thể nhân  $B' A'$  :

$$B' A' = D = [d_{ij}]_{p \times m} \quad \text{trong đó } d_{ij} = \sum_{k=1}^n b'_{ik} a'_{kj}$$

Ta nhận thấy

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = c_{ji} = c'_{ij}$$

Vậy có

$$B' A' = C' = (AB)'$$

tức là (3.6.1).

### 3.6.2. Chứng minh tính chất 1 của định thức :

$$\det(A^t) = \det(A) \quad (3.6.2)$$

Trước hết ta chứng minh một bổ đề, bổ đề 3.6.1 dưới đây, đó chính là công thức (3.2.2) ở mục 3.2.2.

**Bổ đề 3.6.1 :**

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{21} \det(M_{21}) + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det(M_{n1}) \quad (3.6.3)$$

Đây là công thức khai triển định thức  $\det(A)$  theo cột một.

*Chứng minh*

$M_{ij}$  ký hiệu ma trận suy từ  $A$  bằng cách bỏ đi hàng  $i$ , cột  $j$ ;  $M_{ij}^{kl}$  ký hiệu ma trận suy từ  $A$  bằng cách bỏ đi hàng  $i$ , hàng  $k$ , cột  $j$ , cột  $l$ ;

$$\Delta := \det(A); \Delta_{ij} := \det(M_{ij}); \Delta_{ij}^{kl} := \det(M_{ij}^{kl})$$

Ta chứng minh công thức (3.6.3) bằng phương pháp quy nạp toán học.

Rõ ràng nó đúng với định thức cấp 1 và cấp 2. Bây giờ giả sử (3.6.3) đúng với định thức cấp  $n-1$ ,  $n > 2$ . Theo (3.2.1) ta có

$$\Delta = a_{11} \Delta_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j}$$

Áp dụng (3.6.3) vào các định thức  $\Delta_{1j}$  cấp  $n-1$  ta được

$$\Delta = a_{11} \Delta_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \left( \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \Delta_{1j}^{k1} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta = a_{11} \Delta_{11} + \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n (-1)^{k+j} a_{1j} a_{k1} \Delta_{1j}^{k1}$$

$$\Rightarrow \Delta = a_{11}\Delta_{11} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \left( \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \Delta_{1j}^{k1} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta = a_{11}\Delta_{11} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \sum_{j=2}^n \Delta_{kj1} \Rightarrow (3.6.3)$$

Bây giờ ta chứng minh công thức (3.6.2).

Rõ ràng nó đúng với ma trận cấp 1. Bây giờ giả sử nó còn đúng đến ma trận cấp  $n-1$ ,  $n > 1$ . Xét  $A$  là ma trận cấp  $n$ . Theo (3.2.1) ta có

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} \det(M_{1n})$$

Vậy theo giả thiết quy nạp thì

$$\det(A) = a_{11} \det(M'_{11}) - a_{12} \det(M'_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} \det(M'_{1n})$$

Vế phải của đẳng thức trên chính là khai triển của  $\det(A')$  theo cột 1. Vậy áp dụng bổ đề 3.6.1 ta suy ra (3.6.2).

### 3.6.3. Chứng minh tính chất 2 của định thức :

*Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của một định thức ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.*

**Bổ đề 3.6.2.** *Đổi chỗ hai hàng liên tiếp thì định thức đổi dấu.*

*Chứng minh.* Rõ ràng bổ đề đúng với định thức cấp 2. Bây giờ giả sử nó còn đúng với định thức cấp  $n-1$ ,  $n > 2$ .

Gọi  $A = [a_{ij}]$  là ma trận cấp  $n$ ,  $\Delta_{ij} = \det(M_{ij})$ ;

Gọi  $A' = [a'_{ij}]$  là ma trận suy từ  $A$  sau khi đổi chỗ hai hàng liên tiếp  $k, k+1$ ,  $\Delta'_{ij} = \det(M'_{ij})$  ;

Khai triển  $\det(A')$  theo cột một ta có

$$\det(A') = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_{i1} \Delta'_{i1}$$

trong đó  $\Delta'_{i1}$  là các định thức cấp  $n-1$ , đồng thời

khi  $i = k$  thì  $a'_{k1} = a_{(k+1)1} \Rightarrow \Delta'_{k1} = -\Delta_{(k+1)1}$

khi  $i = k + 1$  thì  $a'_{(k+1)1} = a_{k1} \Rightarrow \Delta'_{(k+1)1} = -\Delta_{k1}$

khi  $i \neq k, k + 1$  thì  $a'_{i1} = a_{i1} \Rightarrow \Delta'_{i1} = -\Delta_{i1}$

$$a'_{(i+1)1} = a_{(i+1)1} \Rightarrow \Delta'_{(i+1)1} = -\Delta_{(i+1)1}$$

Do đó

$$\det(A') = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a'_{i1} \Delta'_{i1} = -\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \Delta_{i1} = -\Delta$$

ngĩa là bổ đề 3.6.2 được chứng minh.

Bây giờ muốn đổi chỗ hai hàng bất kì  $s$  và  $r$  ( $r > s + 1$ ) trước hết ta đưa hàng  $r$  đến hàng  $s$  bằng  $r - s$  lần đổi chỗ hai hàng liên tiếp. Khi đó hàng  $s$  cũ chiếm vị trí hàng  $s + 1$ , ta đưa nó đến vị trí hàng  $r$  cũ bằng  $r - s - 1$  lần đổi chỗ hai hàng liên tiếp. Vậy muốn đổi chỗ hai hàng bất kì  $s$  và  $r$ , ( $r > s + 1$ ) ta phải thực hiện  $2(r - s) - 1$  lần đổi chỗ hai hàng liên tiếp. Do đó theo bổ đề 3.6.2, định thức đổi dấu  $2(r - s) - 1$  lần, tức là một số lẻ lần. Vậy định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.

### 3.6.4. Chứng minh định lí 3.3.5 :

*A và B là hai ma trận vuông cùng cấp. Khi đó*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{3.6.4}$$

Chứng minh này chia làm nhiều bước :

**(i) Ma trận sơ cấp và phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận.**

Có ba phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận A và ba ma trận sơ cấp thực hiện chúng :

1. Phép nhân (các phần tử của) hàng  $r$  với số  $\lambda \neq 0$ , thực hiện bởi phép nhân bên trái ma trận A với ma trận









$$A = F_1 F_2 \dots F_k U, \quad (3.6.5)$$

trong đó  $U$  là một ma trận tam giác trên với

$$u_{ii} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k, \quad k \leq n. \quad (3.6.6)$$

*Chứng minh.* Bằng một số hữu hạn phép biến đổi sơ cấp về hàng ta đưa ma trận  $A$  về ma trận tam giác trên  $U$  thỏa mãn (3.6.6), nghĩa là tồn tại một số hữu hạn ma trận sơ cấp  $E_1, E_2, \dots, E_m$  để

$$E_m E_{m-1} \dots E_1 A = U.$$

Do đó áp dụng định lí 3.3.3 ta suy ra

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_m^{-1} U.$$

Đặt  $E_i^{-1} = F_i$  thì  $F_i$  là ma trận sơ cấp cùng loại với  $E_i$  và

$$A = F_1 F_2 \dots F_m U.$$

Vậy ta được kết luận của bổ đề.

*Thí dụ 3.6.4.* Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp về hàng như sau :

$$\begin{matrix} L_1 := L_1 \\ L_2 := -2L_1 + L_2 \\ L_3 := L_3 \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{E_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} A = E_1 A = A_1$$

$$\begin{matrix} L_1 := L_1 \\ L_2 := L_2 \\ L_3 := -1L_1 + L_3 \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}}_{E_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} A_1 = E_2 A_1 = A_2$$

$$\begin{array}{l} L_1 := L_1 \\ L_2 := L_2 \\ L_3 := 2L_2 + L_3 \end{array} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{E_3} \quad A_2 = E_3 A_2 = A_3$$

$$\begin{array}{l} L_1 := L_1 \\ L_2 := L_2 \\ -1L_3 := L_3 \end{array} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_4} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_4} \quad A_3 = E_4 A_3 = A_4$$

trong đó  $E_1, E_2, E_3, E_4$  là các ma trận sơ cấp.

Đặt

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ta có

$$U = A_4 = E_4 A_3 = E_4 E_3 A_2 = E_4 E_3 E_2 A_1 = E_4 E_3 E_2 E_1 A.$$

Do đó

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} U.$$

Vậy

$$A = F_1 F_2 F_3 F_4 U, \quad F_i = E_i^{-1}$$

(iii) **Bổ đề 3.6.4.** Nếu  $A$  là ma trận vuông,  $E$  là ma trận sơ cấp cùng cấp thì

$$\det(EA) = \det(E)\det(A). \quad (3.6.7)$$

*Chứng minh.*  $E = F(r, \lambda)$  thì

$$\det(EA) = \lambda \det(A), \text{ và } \det(E) = \lambda$$

nên (3.6.7) đúng.

$E = P(r, s)$  thì

108, 109

$$\det(EA) = -\det(A), \text{ và } \det(E) = -1$$

nên (3.6.7) đúng.

$$E = Q(r, \lambda, s) \text{ thì}$$

$$\det(EA) = \det(A), \text{ và } \det(E) = 1$$

nên (3.6.7) đúng.

(iv) **Bổ đề 3.6.5.** Nếu  $A$  là ma trận vuông,  $U$  là ma trận tam giác trên cùng cấp với  $A$  mà các phần tử chéo  $u_{ii} \neq 0$  khi  $1 \leq i \leq k, k \leq n$  thì

$$\det(UA) = \det(U)\det(A). \tag{3.6.8}$$

*Chứng minh.* Nếu  $k < n$  thì  $u_{mm} = 0$ . Khi đó thì  $U$  và  $UA$  có các phần tử ở hàng cuối cùng toàn là số không. Do đó

$$\det(U) = 0, \det(UA) = 0 \Rightarrow \det(UA) = \det(U)\det(A)$$

Nếu  $k = n$  thì  $u_{ii} \neq 0, 1 \leq i \leq n$ . Khi đó ta đưa  $U$  về ma trận đơn vị  $I$  bằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng, thí dụ như

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Ta có

$$\begin{matrix} L_1 := L_1 \\ L_2 := 3L_3 + L_2 \\ L_3 := L_3 \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_1} U = U_1$$

$$\begin{matrix} L_1 := -3L_3 + L_1 \\ L_2 := L_2 \\ L_3 := L_3 \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_2} U_1 = U_2$$

$$\begin{aligned} L_1 &:= -2L_2 + L_1 \\ L_2 &:= L_2 \\ L_3 &:= L_3 \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q_3} U_2 = I,$$

trong đó  $Q_1, Q_2, Q_3$  là các ma trận sơ cấp. Vậy có

$$I = Q_3 U_2 = Q_3 (Q_2 U_1) = Q_3 Q_2 (Q_1 U) = Q_3 Q_2 Q_1 U.$$

Một cách tổng quát, tồn tại các ma trận sơ cấp  $Q_i$  để

$$Q_k Q_{k-1} \dots Q_1 U = I$$

$$\Rightarrow U = Q_1^{-1} Q_2^{-1} \dots Q_k^{-1} I = P_1 P_2 \dots P_k I,$$

trong đó  $P_i = Q_i^{-1}$  là ma trận sơ cấp cùng loại với  $Q_i$ . Do đó

$$U = P_1 P_2 \dots P_k.$$

Vậy áp dụng bổ đề 3.6.4 ta được

$$\det(U) = \det(P_1) \det(P_2) \dots \det(P_k)$$

$$\det(UB) = \det(P_1) \det(P_2) \dots \det(P_k) \det(B) = \det(U) \det(B).$$

Vậy có (3.6.8).

(v) **Chứng minh (3.6.4)**

Áp dụng bổ đề 3.6.3 ta thấy  $A$  có biểu diễn (3.6.5) trong đó  $U$  thỏa mãn (3.6.6). Do đó

$$AB = F_1 F_2 \dots F_k UB.$$

Áp dụng bổ đề 3.6.4 và 3.6.5 ta suy ra

$$\det(A) = \det(F_1) \det(F_2) \dots \det(F_m) \det(U)$$

$$\det(AB) = \det(F_1) \det(F_2) \dots \det(F_m) \det(U) \det(B).$$

Vậy có

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \Rightarrow (3.6.4).$$

### 3.6.5. Phân tích $A = LU$

Với khái niệm ma trận sơ cấp ta đã chứng minh được bổ đề 3.6.3 và từ đó suy ra định lí 3.3.5. Một hệ quả nữa của bổ đề 3.6.3 là phân tích  $A = LU$  :

*Giả sử  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$ . Nếu có thể đưa  $A$  về  $U$  thỏa mãn (3.6.5) chỉ bằng các phép biến đổi sơ cấp loại một và loại ba thì tồn tại ma trận tam giác dưới  $L$  và ma trận tam giác trên  $U$  để*

$$A = LU.$$

*Chứng minh.* Theo bổ đề 3.6.3 thì tồn tại các ma trận sơ cấp  $F_i$  để

$$F_k F_{k-1} \dots F_1 A = U,$$

trong đó  $U$  là ma trận tam giác trên. Đồng thời vì ta chỉ áp dụng các phép biến đổi sơ cấp loại một và ba nên  $F_i$  và  $(F_i)^{-1}$  là các ma trận tam giác dưới. Do đó

$$A = (F_1)^{-1} (F_2)^{-1} \dots (F_k)^{-1} U$$

Vì tích của hai ma trận tam giác dưới là một ma trận tam giác dưới nên

$$(F_1)^{-1} (F_2)^{-1} \dots (F_k)^{-1} = L$$

là một ma trận tam giác dưới và ta có  $A = LU$ .

*Chú ý 3.6.1.* Nếu khi đưa  $A$  về  $U$  ta phải dùng đến một số biến đổi sơ cấp loại hai thì cuối cùng ta thu được phân tích ma trận  $A$  sau khi đã đổi chỗ các hàng cần thiết thành tích  $LU$ .

## TÓM TẮT CHƯƠNG III

### 1. Ma trận

Ma trận cỡ  $m \times n$  là bảng số chữ nhật

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}$$

viết tắt là

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Khi  $m = n$  ta có ma trận vuông cấp  $n$ .

Tập các ma trận cỡ  $m \times n$  kí hiệu là  $\mathcal{M}_{m \times n}$

Tập các ma trận vuông cấp  $n$  kí hiệu là  $\mathcal{M}_n$

Ma trận không

$$O = [0]_{m \times n} \text{ (các phần tử đều bằng 0)}$$

Ma trận bằng nhau

$$[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

Cộng hai ma trận

$$[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Nhân ma trận với một số

$$k[a_{ij}]_{m \times n} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

Nhân ma trận với ma trận

$$A = [a_{ij}]_{m \times p}, \quad B = [b_{ij}]_{p \times n}$$

thì tích  $AB = C$  là ma trận cỡ  $m \times n$ :

$$C = [c_{ij}]_{m \times n},$$

trong đó

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Ma trận chuyển vị

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A' = [a_{ji}]_{n \times m}.$$

Nếu  $A \in \mathcal{M}_{m \times p}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p \times n}$  thì  $(AB)' = B' A'$ .

## 2. Định thức của ma trận vuông

Cho ma trận vuông cấp  $n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Bỏ đi hàng  $i$  cột  $j$  thì còn lại ma trận cấp  $n - 1$  gọi là *ma trận con ứng phần tử*  $a_{ij}$ , kí hiệu ma trận đó là  $M_{ij}$ .

Định thức của ma trận vuông  $A$ , kí hiệu là  $\det(A)$  được định nghĩa dần dần như sau :

$$A = [a_{11}] \text{ thì } \det(A) = a_{11}$$

Sau đó, định thức của ma trận vuông  $A$  cấp  $n$  là

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(M_{1n}).$$

Định nghĩa đó cũng cho luôn cách tính định thức của ma trận cấp bất kì. Định thức của ma trận cấp  $n$  gọi là *định thức cấp  $n$* .

Định thức của ma trận cấp  $n$  có một số tính chất quan trọng :

1)  $\det(A^t) = \det(A)$ .

2) Đổi chỗ hai hàng thì định thức đổi dấu.

Từ định nghĩa và hai tính chất đó ta suy ra các tính chất khác của định thức

Nếu  $A$  và  $B \in \mathcal{M}_n$  thì  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

## 3. Ma trận nghịch đảo

Ma trận đơn vị cấp  $n$  là ma trận vuông cấp  $n$  có dạng

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Nó có đặc điểm  $AI = IA = A \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$ .

Ma trận  $A \in \mathcal{M}_n$  gọi là *khả đảo* nếu tồn tại ma trận  $B \in \mathcal{M}_n$  sao cho  $AB = BA = I$ . Khi đó,  $B$  gọi là ma trận nghịch đảo của  $A$ .

Kí hiệu ma trận nghịch đảo của  $A$  là  $A^{-1}$  :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Cách tính ma trận nghịch đảo :

Gọi  $D_{ij} = \det(M_{ij})$  là định thức con ứng với  $a_{ij}$  và gọi  $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$  là phụ đại số của  $a_{ij}$ , ta có :

Nếu  $\det(A) \neq 0$  thì  $A$  khả đảo với

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C', \quad C = [C_{ij}]$$

và ngược lại, nếu  $A$  khả đảo thì  $\det(A) \neq 0$ .

Nếu  $A$  và  $B \in \mathcal{M}_n$  và khả đảo thì  $AB$  khả đảo và  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

#### 4. Hệ phương trình tuyến tính

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

Xét các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$



Khi đó hệ (\*) có dạng ma trận

$$Ax = b \quad (**)$$

Hệ Cramer là hệ vuông ( $m = n$ ) với  $\det(A) \neq 0$ .

**Định lí Cramer.** Hệ Cramer có nghiệm duy nhất

$$x_j = \det(A_j) / \det(A), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

trong đó  $A_j$  suy từ  $A$  bằng cách thay cột thứ  $j$  bởi cột vế phải  $b$ .

Trường hợp  $m = n$  ta còn có :

Hệ thuần nhất  $Ax = 0$  có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi  $\det(A) = 0$ , và các mệnh đề sau tương đương :

- (a)  $\det(A) \neq 0$ .
- (b)  $A$  khả đảo.
- (c) Hệ  $Ax = b$  có nghiệm duy nhất.
- (d) Hệ  $Ax = 0$  chỉ có nghiệm tầm thường.

**Định lí Kronecker - Capelli.** Điều kiện cần và đủ để hệ (\*) tức là (\*\*\*) có nghiệm là

$$\text{hạng của } A = \text{hạng của } \bar{A} (= [A, b])$$

$\bar{A}$  là ma trận  $A$  bổ sung thêm cột  $b$  ở bên phải.

### BÀI TẬP CHƯƠNG III

3.1. Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Tính

- 1)  $(A + B) + C$ ;      2)  $A + (B + C)$ ;      3)  $3A$ .
- 4) Tìm  $A^t, B^t, C^t$ .

### 3.2. Hãy nhân các ma trận :

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$b) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$f) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 2 \ 3]$$

$$g) [1 \ 2 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3. Hãy thực hiện các phép tính sau

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2;$$

$$b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3;$$

$$c) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n;$$

$$e) \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^n$$

### 3.4. Hãy tính $AB - BA$ nếu

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

3.5. Chứng minh rằng nếu  $AB = BA$  thì

a)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b)  $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

3.6. Hãy tìm tất cả các ma trận giao hoán với ma trận  $A$  dưới đây :

a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  ;

b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3.7. Hãy tìm  $f(A)$  với

$$f(x) = x^2 - 5x + 3I \text{ và } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

3.8. Hãy tìm tất cả các ma trận cấp hai có bình phương bằng ma trận không.

3.9. Hãy tìm tất cả các ma trận cấp hai có bình phương bằng ma trận đơn vị.

3.10. Cho

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hãy kiểm tra lại tính kết hợp

$$(AB)C = A(BC)$$

của phép nhân ma trận.

3.11. Cho

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

3.108.10  
3.108.10  
3.108.10

Hãy tính

1)  $A'$  ;      2)  $B'$  ;      3)  $A'B'$  ;      4)  $B'A'$ .

5)  $(AB)'$  ;      6)  $(BA)'$  ;      7)  $(A+B)'$ .

3.12. Tính các định thức cấp hai

a)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$  ;      b)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$  ;      c)  $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$

d)  $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$  ;      e)  $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix}$

3.13. Tính các định thức cấp ba

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$       b)  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$       d)  $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3.14. Cho

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$$

Hỏi các định thức sau

a)  $\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix}$       b)  $\begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix}$

bằng bao nhiêu ?

3.15. Cho

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = \Delta$$

Hỏi các định thức sau bằng bao nhiêu :

$$a) \begin{vmatrix} b & c & d & a \\ b' & c' & d' & a' \\ b'' & c'' & d'' & a'' \\ b''' & c''' & d''' & a''' \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} d & c & b & a \\ d' & c' & b' & a' \\ d'' & c'' & b'' & a'' \\ d''' & c''' & b''' & a''' \end{vmatrix}$$

3.16. Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

3.17. Biết rằng các số 204, 527, 255 chia hết cho 17. Hãy chứng minh

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

chia hết cho 17.

3.18. Chứng minh

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

3.19. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

bằng cách khai triển nó theo các phần tử của hàng ba.

3.20. Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$$

bằng cách khai triển nó theo các phần tử của cột bốn.

3.21. Tính các định thức sau

$$1) \begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}; \quad 8) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

3.22. Chứng minh

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =:$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \times \\
 &\quad \times (x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) \times \\
 &\quad \times \dots \times \\
 &\quad \times (x_n - x_{n-1}) = \\
 &= \prod_{i>j} (x_i - x_j).
 \end{aligned}$$

**3.23. Cho ma trận chéo**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó  $a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \neq 0$ . Chứng minh rằng  $A$  khả đảo và tìm  $A^{-1}$ .

**3.24. Chứng minh rằng nếu  $A$  là ma trận vuông thoả mãn  $A^2 - 3A + I = 0$  thì  $A^{-1} = 3I - A$ .**

**3.25. Cho hai ma trận vuông  $A$  và  $B$  sao cho  $AB = 0$ . Chứng minh rằng  $A$  không thể khả đảo trừ khi  $B = 0$ .**

**3.26. Chứng minh rằng nếu  $A$  khả đảo và  $AB = AC$  thì  $B = C$ .**

**3.27.  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$ .**

- 1) Cho  $\det(A) = 3$ , hãy tính  $\det(A^2)$  và  $\det(A^3)$ .
- 2) Cho biết  $A$  khả đảo và  $\det(A) = 4$ , tính  $\det(A^{-1})$ .
- 3) Cho  $\det(A) = 5$  và  $B^2 = A$ , tính  $\det(B)$ .
- 4) Cho  $\det(A) = 10$ , tính  $\det(A^1A)$ .

**3.28. Hỏi các ma trận sau có khả đảo không, nếu có, hãy tìm ma trận nghịch đảo bằng phụ đại số :**

- 1)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
- 2)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

Đã kiểm tra  
đúng: 100%  
Số lượt: 80  
Đã kiểm tra  
đúng: 100%  
Số lượt: 80

$$3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3.29. Giải phương trình  $AX = B$  đối với ẩn là ma trận  $X$  với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3.30. Áp dụng định lí Cramer giải các hệ sau

$$1) \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x + 5y = -5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x - 2y - z = -1 \\ y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

3.31. Hỏi các mệnh đề sau là đúng hay sai

- 1) Theo định lí Cramer, nếu  $\det(A) = 0$  thì hệ  $Ax = b$  vô nghiệm.
- 2) Theo định lí Cramer, nếu  $Ax = 0$  có nghiệm không tầm thường thì  $\det(A) = 0$ .



3.32. Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

3.33. Hãy giải các hệ sau bằng cách tính ma trận nghịch đảo

$$1) \begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = -6 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} -3x + 2y = -6 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}.$$

3.34. Giải

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2y = 4 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

3.35. Áp dụng phương pháp Gauss giải các hệ sau :

$$1) \begin{cases} 1,2x - 0,8y = 2,0 \\ -1,5x + 0,25y = -4,0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x + 4y + 9z = -9 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 - 6x_4 + x_5 = -3 \\ -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 - x_5 = 9 \end{cases}$$

**3.36.** Dùng phương pháp Gauss - Jordan tính ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$c) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**3.37.** Dùng phương pháp Gauss - Jordan tính ma trận nghịch đảo của các ma trận sau nếu có

$$1) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix};$$

$$3) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$4) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$5) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$6) A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix};$$

$$7) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -i & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$8) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$9) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}; \quad 10) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix};$$

$$11) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**3.38.** Với các giá trị nào của  $a$  thì hệ sau đây không có nghiệm duy nhất

$$1) \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + ay = 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = 4 \end{cases}$$

**3.39.** Tìm những giá trị của  $a$  để hai hệ sau tương đương

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + ay = 4 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$$

**3.40.** Viết nghiệm của các hệ sau theo  $a, b, c$

$$1) \begin{cases} x + 3y = a \\ 2x + 2y = b \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y - z = a \\ x + 2y - 2z = b \\ 2x - y + 2z = c \end{cases}$$

**3.41.** Xác định  $a$  để hệ sau có nghiệm không tầm thường

$$1) \begin{cases} ax - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (1 - a)x + 2y = 0 \\ 2x + (4 - a)y = 0 \end{cases}$$

**3.42.** Trong các hệ sau đây, hệ nào có nghiệm không tầm thường, hệ nào không có :

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_3 = 0 \end{cases}$$

**3.43.** Tìm hạng của các ma trận sau :

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

**3.44.** Xác định hạng của các ma trận sau tùy theo  $\lambda$  ( $\lambda$  thực) :

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**3.45.** Giải các hệ sau và biện luận theo các tham số :

$$1) \begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

### ĐÁP SỐ

$$3.1. 1) \text{ và } 2) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix};$$

$$3) \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$4) A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3.2. a) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$b) \begin{bmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$d) \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix};$$

$$f) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

g) [13].

$$3.3. \quad \text{a) } \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{e) } \begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}.$$

$$3.4. \quad \text{a) } \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -7 & 9 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3.5. \quad (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

$$3.6. \quad \text{a) } \begin{bmatrix} x & 2y \\ -y & x-2y \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ u & v & 0 \\ 3t-3x-u & t-3y-v & t \end{bmatrix}$$

$$3.7. \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3.8. \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad \text{với } bc + a^2 = 0$$

$$3.9. \quad \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad \text{với } a^2 + bc = 1$$

$$3.10. \quad \text{Cả hai vế đều bằng } \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.11. 1)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  ;

2)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

3)  $\begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$  ;

4)  $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

5)  $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$  ;

6)  $\begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$  ;

7)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ .

- 3.12. a) 5 ;            b) 5 ;            c) 1 ;            d)  $ab - c^2 - d^2$  ;  
 e)  $1/\cos^2\alpha$ .

- 3.13. a) 1 ;            b) 2 ;            c) 1 ;            d) -2.

- 3.14. a)  $\Delta$  ;            b)  $-\Delta$ .

- 3.15. a)  $-\Delta$  ;            b)  $\Delta$ .

3.16. Phương trình có ba nghiệm : 2, 3, 4.

3.17. Cộng vào cột cuối cột thứ nhất nhân với 100 và cột thứ hai nhân với 10.

3.19.  $3a - b + 2c + d$ .

3.20.  $4t - x - y - z$ .

3.21. 1) -1487600 ;            2) -29400000 ;

3) 48 ;            4) 1 ;

5) 160 ;            6) 12.

7)  $a^2 + b^2 + c^2 - 2(bc + ca + ab)$  ;

8)  $-2(x^3 + y^3)$ .

$$3.23. A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$3.27. 1) \det(A^2) = 9, \det(A^3) = 27$$

$$2) \det(A^{-1}) = 1/4$$

$$3) \det(B) = \pm\sqrt{5}$$

$$4) \det(A^t A) = 100$$

$$3.28. 1) \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 \\ -1/3 & 2/9 \end{bmatrix}$$

2) Không khả đảo

$$3) \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & -3/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} -1/7 & -4/7 & 2/7 \\ 5/14 & -1/14 & -3/14 \\ -1/7 & 3/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

$$3.29. \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$3.30. 1) (-3, 7/5);$$

$$2) (2/3, 5/3)$$

$$3) (2, 4, -3);$$

$$4) (7, -3, -9)$$

$$5) (3, 1, 1);$$

$$6) (2, -2, 3)$$

$$7) (1, 2, -1, -2);$$

$$8) (1, 2, 1, -1)$$

$$3.31. 1) \text{ Không đúng};$$

$$2) \text{ Đúng}$$



3.32. a)  $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

3.34. 1)  $(-1, 2)$ ;

3.35. 1)  $(3, 2)$ ;

3)  $(2, 1, 0, -1)$ ;

3.36. a)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;

c)  $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.37. 1)  $\begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{bmatrix}$

3)  $\begin{bmatrix} -9 & 7 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

5)  $\begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$

7)  $\begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

9)  $\begin{bmatrix} 5/43 & 2/43 & 6/43 \\ 14/43 & -3/43 & -9/43 \\ -8/43 & 14/43 & -1/43 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

2)  $(3, 2, 1, -1)$

2)  $(1, 2, -2)$

4)  $(-3, 0, 2, 1, 0)$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2)  $\begin{bmatrix} 7 & -4 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4) Không có nghịch đảo

6) Không có nghịch đảo

8)  $\begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$

10)  $\begin{bmatrix} 17/2 & 7/2 & -3/2 & 1/2 \\ 33/4 & 13/4 & -7/4 & 3/4 \\ 5/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -13/2 & -5/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

$$11) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 5/2 & 2 & 7 & -25/2 \\ -3/2 & -1 & -4 & 15/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & -3/2 \end{bmatrix}$$

3.38. 1)  $-6$  ;

2)  $-\frac{4}{5}$ .

3.39.  $-1$

3.40. 1)  $((3b - 2a)/4, (2a - b)/4)$

2)  $(2a - b, -6a + 4b + c, -5a + 3b + c)$

3.41. 1)  $-5$

2)  $0$  và  $5$

3.42. 1) Có ;

2) Không

3.43. a)  $\rho(A) = 2$

b)  $\rho(A) = 3$

c)  $\rho(A) = 2$

3.44. a)  $\lambda = 0$  thì  $\rho(A) = 2$

$\lambda \neq 0$  thì  $\rho(A) = 3$

b)  $\lambda = 1$  thì  $\rho(A) = 3$

$\lambda \neq 1$  thì  $\rho(A) = 4$

3.45. 1) Nếu  $\lambda \neq 1$  và  $\lambda \neq -2$ , thì hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = -\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}, \quad y = \frac{1}{\lambda + 2}, \quad z = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}$$

Nếu  $\lambda = 1$  thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số

Nếu  $\lambda = -2$  thì hệ không có nghiệm

2) Nếu  $a \neq b \neq c$  thì hệ có nghiệm duy nhất

$$x = abc, \quad y = -(ab + ac + bc), \quad z = a + b + c$$

Nếu trong số  $a, b, c$  có hai số bằng nhau thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số.

Nếu  $a = b = c$  thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số.

3) Nếu  $a \neq b \neq c$  thì hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}, \quad y = \frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}, \quad z = \frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}$$

Nếu  $a = b, a \neq c, d = a$  hay  $d = c$  thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số.

Nếu  $b = c, a \neq b, d = a$  hay  $d = b$  thì hệ cũng có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số.

Nếu  $a = c, a \neq b, d = a$  hay  $d = b$  thì hệ cũng có vô số nghiệm phụ thuộc một tham số.

Nếu  $a = b = c = d$  thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc hai tham số.

Trong tất cả các trường hợp còn lại, hệ vô nghiệm.

## *Chương IV*

# HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

(Ôn tập : Đường bậc hai và mặt bậc hai)

### 4.1. MỞ ĐẦU

Có thể nói hình học giải tích là môn hình học lấy đại số làm phương tiện chủ yếu.

Muốn thế trước hết người ta biểu diễn mỗi điểm trong mặt phẳng bằng một cặp số toạ độ, mỗi điểm trong không gian bằng một bộ ba số toạ độ, mỗi đường trong mặt phẳng bằng một phương trình đối với cặp số toạ độ, mỗi mặt trong không gian bằng một phương trình đối với bộ ba số toạ độ. Sau đó người ta áp dụng các phương pháp đại số để giải quyết các vấn đề hình học.

Nội dung môn học này đã được trình bày ở sách giáo khoa bậc học phổ thông. Chương này chỉ ôn tập khái niệm đường bậc hai và mặt bậc hai, cần biết khi học môn giải tích toán học, đặc biệt là phần phép tính tích phân của hàm nhiều biến số.

### 4.2. ĐƯỜNG BẬC HAI TRONG MẶT PHẪNG

#### 4.2.1. Phương trình bậc hai tổng quát

Ở trường trung học ta đã thấy các đường tròn, elip, hypebôn, parabol đều có phương trình là phương trình bậc hai đối với  $x$  và  $y$ . Nay ta xét bài toán ngược lại, tức là tìm biểu diễn hình học của một

phương trình bậc hai đối với  $x, y$ . Dạng tổng quát của một phương trình như thế là

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (4.2.1)$$

$$(|A| + |B| + |C| \neq 0)$$

mà biểu diễn hình học của nó là đường bậc hai.

Trước hết ta xét một số trường hợp riêng thông qua các thí dụ.

#### 4.2.2. Phương trình vắng số hạng chéo $xy$ và có các hệ số của $x^2$ và $y^2$ bằng nhau

*Thí dụ 4.2.1.* Xét phương trình

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \quad (4.2.2)$$

Nó tương đương với

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

Ta nhận thấy phương trình (4.2.2) biểu diễn trong mặt phẳng  $Oxy$  đường tròn tâm  $I(1, -2)$  bán kính  $R = 3$ .

#### 4.2.3. Phương trình vắng số hạng chéo $xy$ và các số hạng bậc nhất

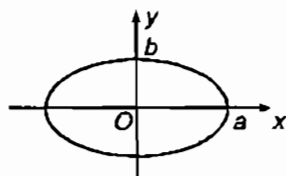
*Thí dụ 4.2.2.* Xét phương trình

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad (4.2.3)$$

Nó tương đương với

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Ta nhận thấy phương trình (4.2.3) là phương trình của một elip có bán trục lớn  $a = 3$  nằm trên  $Ox$  và bán trục nhỏ  $b = 2$  nằm trên  $Oy$  (hình 21).

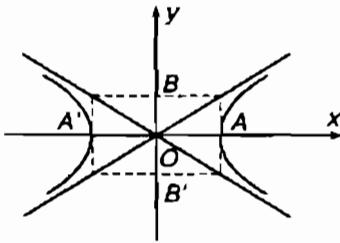


Hình 21

**Thí dụ 4.2.3. Xét phương trình**

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \quad (4.2.4)$$

Nó tương đương với



Hình 22

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Ta nhận thấy (4.2.4) là phương trình của một hypebôn có bán trục thực  $a = 3$  nằm trên  $Ox$  và bán trục ảo  $b = 2$  nằm trên  $Oy$  và có hai tiệm cận  $y = \pm \frac{2}{3}x$  (hình 22).

**Thí dụ 4.2.4. Xét phương trình**

$$x^2 + 2y^2 = 0 \quad (4.2.5)$$

Phương trình này thoả mãn khi và chỉ khi  $x = 0, y = 0$ . Vậy biểu diễn hình học của nó là một điểm có tọa độ  $(0, 0)$ , đó là gốc tọa độ.

**Thí dụ 4.2.5. Xét phương trình**

$$4x^2 - y^2 = 0 \quad (4.2.6)$$

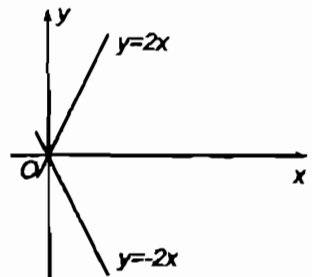
Phương trình này tương đương với

$$(2x - y)(2x + y) = 0 \quad (4.2.7)$$

Cặp số  $(x, y)$  thoả mãn (4.2.7) khi và chỉ khi nó thoả mãn một trong hai phương trình

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0, \\ 2x + y &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Vậy biểu diễn hình học của (4.2.6) là biểu diễn hình học của hai phương trình (4.2.8), đó là hai đường thẳng đi qua gốc tọa độ (hình 23).



Hình 23

*Thí dụ 4.2.6.* Xét phương trình

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad (4.2.9)$$

Nó tương đương với

$$x^2 + y^2 = -1 \quad (4.2.10)$$

Không có cặp số thực  $(x, y)$  nào thoả mãn phương trình (4.2.10). Nhưng những cặp số như  $(i, 0)$ ,  $(-i, 0)$ ,  $(0, i)$ ,  $(0, -i)$  thoả mãn nó. Nói chung ta có thể viết (4.2.9) thành

$$x^2 + y^2 = i^2$$

và xem nó là một đường tròn ảo tâm tại  $O(0, 0)$  với bán kính ảo  $R = i$ .

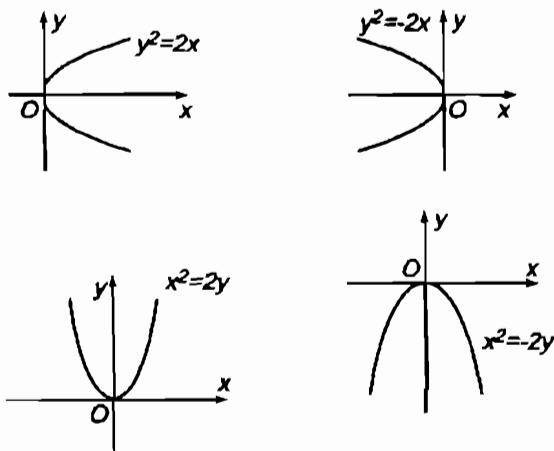
#### 4.2.4. Phương trình vắng số hạng chéo và vắng một số hạng bình phương

*Thí dụ 4.2.7.* Xét các phương trình

$$y^2 = 2x, \quad y^2 = -2x,$$

$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -2y.$$

Ta thấy chúng có biểu diễn hình học là các đường parabol ở hình 24.



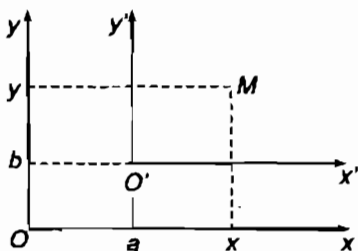
Hình 24

### 4.2.5. Công thức đổi trục

Toạ độ  $(x, y)$  của một điểm  $M$  phụ thuộc hệ trục toạ độ mà ta chọn. Phương trình bậc hai tổng quát đối với  $x, y$  có dạng (4.2.1) trong hệ trục  $Oxy$ . Nếu ta chọn một hệ trục khác thì phương trình ấy sẽ thay đổi và có thể đơn giản đi rất nhiều. Vì vậy muốn xét biểu diễn hình học của phương trình tổng quát (4.2.1) trước hết ta xét các công thức đổi trục.

Có hai cách đổi trục từ hệ cũ  $Oxy$  sang hệ mới  $O'x'y'$ , đó là phép tịnh tiến và phép quay.

#### a) Công thức tịnh tiến trục



Hình 25

Tịnh tiến hệ trục  $Oxy$  thành hệ trục  $O'x'y'$  nếu  $O'x' \parallel Ox$  và  $O'y' \parallel Oy$  (hình 25). Phép tịnh tiến trục được hoàn toàn xác định khi cho toạ độ  $(a, b)$  của  $O'$  đối với hệ  $Oxy$ .

Xét một điểm  $M$  trong mặt phẳng. Liên hệ giữa các toạ độ  $(x, y)$  của  $M$  trong hệ  $Oxy$  với các toạ độ  $(x', y')$  cũng của  $M$  trong hệ  $O'x'y'$  là

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases} \quad (4.2.11a)$$

Đó là các công thức tịnh tiến trục (từ  $Oxy$  sang  $O'x'y'$ ).

Từ đó ta suy ra

$$\begin{cases} x' = -a + x \\ y' = -b + y \end{cases}$$

Đây cũng có thể xem là công thức tịnh tiến trục từ  $O'x'y'$  sang  $Oxy$ .

#### b) Công thức quay trục

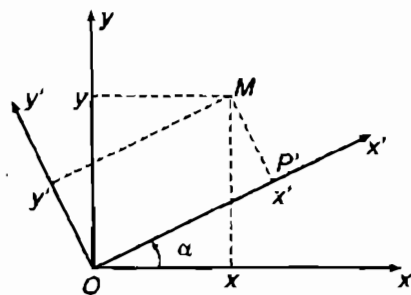
Khi ta quay hệ cũ  $Oxy$  một góc  $\alpha$  xung quanh gốc  $O$  ta được một hệ mới  $Ox'y'$ . Phép quay trục được xác định hoàn toàn bởi góc  $\alpha$  (hình 26).



Xét một điểm  $M$  trong mặt phẳng. Nó có tọa độ  $(x, y)$  đối với hệ cũ và tọa độ  $(x', y')$  đối với hệ mới. Ta có

$$\overline{OM} = \overline{OP'} + \overline{P'M}$$

Chiếu đẳng thức hình học này lên hai trục  $Ox$  và  $Oy$  ta được liên hệ giữa  $(x, y)$  và  $(x', y')$ :



Hình 26

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (4.2.11b)$$

Các công thức này gọi là các công thức quay trục (từ  $Oxy$  sang  $Ox'y'$ ).

Bằng cách thay  $\alpha$  bởi  $-\alpha$  ta suy ra các công thức quay trục từ  $Ox'y'$  sang  $Oxy$ :

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

#### 4.2.6. Một số áp dụng đơn giản

*Thí dụ 4.2.8.* Xét phương trình:

$$y = x^2 - 2x + 2 \quad (4.2.12)$$

Ở phổ thông ta gọi đồ thị của hàm số  $y$  này là một parabol. Bây giờ ta giải thích tại sao có thể gọi như vậy. Ta viết (4.2.12) thành

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x + 2 = \\ &= x^2 - 2x + 1 + 1 = (x - 1)^2 + 1 \end{aligned}$$

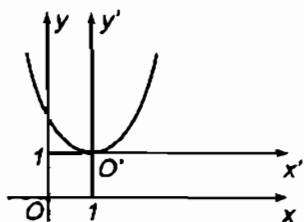
và suy ra

$$y - 1 = (x - 1)^2$$

Đặt  $y - 1 = y'$ ,  $x - 1 = x'$ .

Vậy nếu tịnh tiến trục theo công thức

$$\begin{cases} x = 1 + x' \\ y = 1 + y' \end{cases}$$



Hình 27

(trong đó  $a = 1, b = 1$ ), thì phương trình đã cho viết

$$y' = x'^2,$$

Đó là phương trình của một parabol đối với hệ mới (hình 27).

Thí dụ 4.2.9. Xét phương trình :

$$xy = k^2 \quad (k \text{ là hằng số khác } 0) \quad (4.2.13)$$

Ở phổ thông ta đã gọi đồ thị của nó là một hypebôn cân. Bây giờ ta giải thích tại sao gọi thế.

Ta quay trục đi một góc  $\alpha = 45^\circ$  tức là theo công thức :

$$\begin{cases} x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

Thay vào (4.2.13) ta có

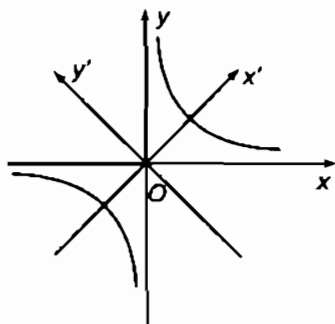
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = k^2$$

$$\frac{x'^2 - y'^2}{2} = k^2, \text{ hoặc}$$

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2}k)^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{2}k)^2} = 1$$

Đó là phương trình của một hypebôn đối với hệ trục mới (hình 28) với hai tiệm cận  $y' = \pm x'$ .

Hypebôn này gọi là cân theo nghĩa nó có bán trục thực và bán trục ảo bằng nhau (cùng bằng  $\sqrt{2}k$ ).



Hình 28

### 4.2.7. Trường hợp tổng quát

Trở lại phương trình tổng quát (4.2.1). Giả sử  $B \neq 0$ .

Trước hết bằng một phép quay trục thích hợp

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

ta đưa phương trình (4.2.1) về một phương trình bậc hai đối với  $x', y'$

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0 \quad (4.2.14)$$

trong đó

$$A' = \frac{1}{2}(A - C)\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha + \frac{1}{2}(A + C)$$

$$C' = \frac{1}{2}(C - A)\cos 2\alpha - B\sin 2\alpha + \frac{1}{2}(A + C)$$

$$B' = \frac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha$$

Chọn  $\alpha$  thoả mãn điều kiện  $B' = 0$ , tức là

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \quad (4.2.15)$$

Khi đó, phương trình (4.2.14) chỉ còn

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0 \quad (4.2.16)$$

trong đó

$$A' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} + \frac{1}{2}(A + C)$$

$$C' = \mp \frac{1}{2} \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} + \frac{1}{2}(A + C)$$

Nếu  $B = 0$  thì phương trình (4.2.1) đã có dạng (4.2.16) rồi.

Sau khi đã có (4.2.16) ta dùng một phép tịnh tiến trục thích hợp ta có thể đưa phương trình (4.2.16) về một trong những dạng đơn giản

đã xét ở các mục trên và do đó có thể tìm ra biểu diễn hình học của phương trình đã cho.

Xét đại lượng :

$$\delta := A'C' = AC - B^2 \quad (4.2.17)$$

Kết quả tổng quát là :

1) Nếu  $\delta = AC - B^2 > 0$  thì (4.2.1) xác định một elip, hoặc thu về một điểm, hoặc một elip ảo.

2) Nếu  $\delta = AC - B^2 < 0$  thì (4.2.1) xác định một hypebôn, hoặc hai đường thẳng giao nhau.

3) Nếu  $\delta = AC - B^2 = 0$  thì (4.2.1) xác định một parabol, hoặc một cặp đường thẳng song song, hoặc một cặp đường thẳng trùng nhau, hoặc một cặp đường thẳng ảo song song.

*Thí dụ 4.2.10.* Vẽ đường biểu diễn phương trình

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0 \quad (4.2.18)$$

Ta có  $A = 5, B = 2, C = 2, \delta = AC - B^2 = 10 - 4 = 6 > 0$ , vậy đường biểu diễn là một elip.

Trước hết ta quay hệ trục tọa độ một góc  $\alpha$ , được tính bởi công thức (4.2.15)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

Vậy  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  và  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ . Ta chọn  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ ; do đó

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ta sẽ lấy  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Vậy :  $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}$$

Thế vào phương trình trên ta được

$$6x'^2 + y'^2 - \frac{60}{\sqrt{5}}x' + 18 = 0$$

Phương trình đó có thể viết :

$$6(x' - \sqrt{5})^2 - 30 + y'^2 + 18 = 0,$$

hay

$$6(x' - \sqrt{5})^2 + y'^2 - 12 = 0.$$

Đổi tọa độ  $x' - \sqrt{5} = X$ ,  $y' = Y$ , tức là tịnh tiến hệ trục  $Ox'$ ,  $Oy'$  sao cho gốc tới điểm  $I$  có tọa độ đối với hệ  $Ox'$ ,  $Oy'$  là  $(\sqrt{5}, 0)$ .

Ta được :

$$6X^2 + Y^2 - 12 = 0$$

hay, chia hai vế cho 12, ta được

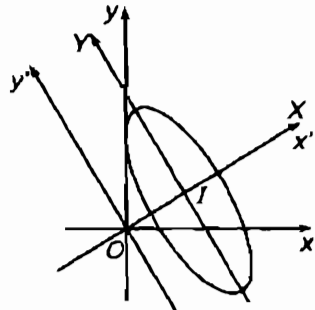
$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{12} = 1.$$

Vậy đường biểu diễn của (4.2.18) là một elip nhận  $IX$ ,  $IY$  làm trục đối xứng, có trục lớn nằm trên  $IY$ , bán trục lớn là  $2\sqrt{3}$ , trục nhỏ nằm trên  $IX$ , bán trục nhỏ bằng  $\sqrt{2}$  (hình 29).

Vậy là bằng các công thức đổi trục ta có thể đưa một phương trình bậc hai tổng quát đối với  $x$ ,  $y$  về một trong các dạng gọn nhất. Việc làm đó gọi là rút gọn phương trình bậc hai tổng quát. Bài toán này sẽ giải quyết đầy đủ và gọn hơn ở cuối chương 8.

Chú ý 4.2.1. Xem thêm chương 8, mục 8.6.1.

BÀI TẬP : 4.1 - 4.4.



Hình 29

### 4.3. MẶT BẬC HAI

Bây giờ ta sẽ nghiên cứu những mặt mà phương trình của chúng là bậc hai đối với  $x, y, z$ . Những mặt đó được gọi là những *mặt bậc hai*.

#### 4.3.1. Mặt cầu

Ở trường phổ thông trung học ta đã thấy rằng phương trình của mặt cầu tâm  $I(a, b, c)$  bán kính  $R$  là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (4.3.1)$$

hay

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0$$

Đó là một phương trình bậc hai đối với  $x, y, z$ , trong đó các hệ số của  $x^2, y^2, z^2$  bằng nhau, không có các số hạng chéo  $xy, yz, xz$ . Ngược lại, mọi phương trình bậc hai đối với  $x, y, z$ , trong đó các hệ số của  $x^2, y^2, z^2$  bằng nhau, không có các số hạng chéo,  $xy, yz, zx$  đều biểu diễn một mặt cầu nào đó, vì có thể dễ dàng đưa phương trình ấy về dạng (4.3.1), mặt cầu đó có thể thu về một điểm hay là ảo.

*Thí dụ 4.3.1. Phương trình*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$$

có thể viết như sau :

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 - 1 - 4 - 9 - 2 = 0,$$

hay 
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 16 = 0.$$

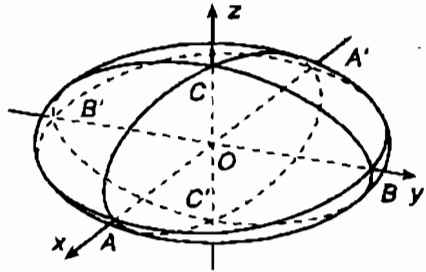
Đó là phương trình của mặt cầu tâm  $(1, -2, 3)$  bán kính là 4.

#### 4.3.2. Mặt elipxôit

Trong không gian, phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.3.2)$$

trong đó  $a, b, c$  là những hằng số dương, xác định mặt mà ta gọi là *mặt elipxôit* (hình 30). Vì phương trình (4.3.2) chỉ chứa bình phương của  $x, y, z$  nên mặt elipxôit nhận các mặt phẳng tọa độ làm mặt phẳng đối xứng, nhận gốc  $O$  làm tâm đối xứng.



Hình 30

Cắt mặt elipxôit bởi các mặt phẳng tọa độ  $xOy, yOz, zOx$ , giao tuyến theo thứ tự là những elip (hình 30).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$$

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, y = 0$$

Cắt mặt elipxôit bởi mặt phẳng  $z = h$  song song với mặt phẳng  $xOy$ , giao tuyến có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, z = h \tag{4.3.3}$$

Nếu  $|h| < c$ , phương trình (4.3.3) có thể viết

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, z = h.$$

Đó là phương trình của một elip có các bán trục là

$$a \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)}, \quad b \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)}$$

Khi  $h$  tăng từ 0 đến  $c$  các bán trục đó nhỏ dần. Nếu  $h = 0$  giao tuyến là elip có các bán trục  $a, b$ . Nếu  $h = c$ , giao tuyến thu lại điểm  $(0, 0, c)$ . Khi  $h$  biến thiên từ  $-c$  đến  $+c$ , giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt elipxôit.  $a, b, c$  được gọi là các *bán trục* của elipxôit.

Nếu  $a = b$ , giao tuyến của elipxôit với các mặt phẳng  $z = h$  là những đường tròn

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \left( 1 - \frac{h^2}{c^2} \right), \\ z = h \end{cases}$$

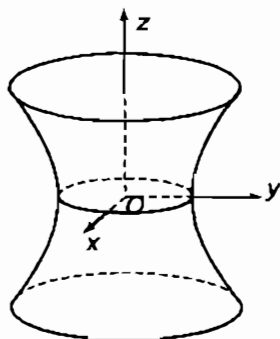
Có thể xem elipxôit đó là mặt sinh ra do quay elip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  quanh trục  $Oz$ . Ta gọi đó là một *elipxôit tròn xoay*. Cũng vậy, nếu  $a = c$  hay  $b = c$  ta có những elipxôit tròn xoay.

Nếu  $a = b = c$ , phương trình (4.3.2) trở thành  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , đó là phương trình của mặt cầu.

### 4.3.3. Mặt hypebôloit một tầng

Phương trình 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4.3.4)$$

trong đó  $a, b, c$  là những hằng số dương, là phương trình của một mặt mà ta gọi là *mặt hypebôloit một tầng* (hình 31). Mặt đó nhận các mặt phẳng tọa độ làm mặt đối xứng, nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.



Hình 31

Cắt mặt (4.3.4) bởi mặt phẳng  $xOy$ , giao tuyến là elip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ .

Cắt nó bởi các mặt phẳng  $yOz, zOx$ , giao tuyến theo thứ tự là các hypebôn  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$  ;  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$  (hình 31).



Cắt mặt (4.3.4) bởi mặt phẳng  $z = h$  song song với mặt phẳng  $xOy$ , giao tuyến có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \quad z = h. \quad (4.3.5)$$

Đó là phương trình của một elip có các bán trục là

$$a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

Nếu  $h = 0$  giao tuyến là elip có các bán trục  $a, b$ . Khi  $h$  tăng dần và lớn lên vô cùng, các bán trục của giao tuyến cũng tăng dần và lớn lên vô cùng. Khi  $h$  biến thiên từ  $-\infty$  đến  $+\infty$ , giao tuyến di chuyển và sinh ra hypebôloit một tầng.  $a, b, c$  được gọi là các bán trục của mặt. Nếu  $a = b$ , giao tuyến (4.3.5) là những đường tròn :

$$x^2 + y^2 = a^2 \left( 1 + \frac{h^2}{c^2} \right), \quad z = h.$$

Lúc đó ta có mặt hypebôloit một tầng tròn xoay, sinh ra do hypebôn  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  quay quanh trục  $Oz$  là trục không cắt hypebôn.

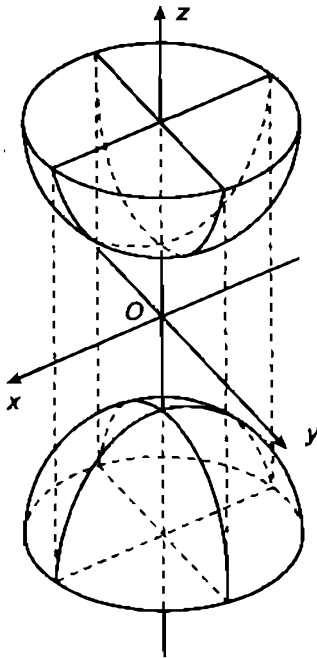
#### 4.3.4. Mặt hypebôloit hai tầng

Phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (4.3.6)$$

trong đó  $a, b, c$  là những hằng số dương, là phương trình của một mặt mà ta gọi là *mặt hypebôloit hai tầng* (hình 32). Mặt đó nhận các mặt phẳng toạ độ làm mặt phẳng đối xứng, nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

Mặt phẳng  $xOy$  không cắt mặt đó. Các mặt phẳng  $xOz, yOz$  theo thứ tự cắt nó theo các đường



Hình 32

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, y = 0;$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, x = 0;$$

đó là những hypebôn cắt trục  $Oz$  (hình 32).

Cắt mặt (4.3.6) bởi mặt phẳng  $z = h$  song song với mặt phẳng  $xOy$ , giao tuyến có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, z = h \quad (4.3.7)$$

Nếu  $|h| > c$ , đó là phương trình của một elip có các bán trục là

$$a \sqrt{\left[ \frac{h^2}{c^2} - 1 \right]}, \quad b \sqrt{\left[ \frac{h^2}{c^2} - 1 \right]}.$$

Nếu  $h = \pm c$ , giao tuyến thu về một điểm. Nếu  $|h|$  tăng dần và lớn lên vô cùng, các bán trục của elip (4.3.7) cũng tăng dần và lớn lên vô cùng.

Khi  $|h|$  tăng từ  $c$  đến  $+\infty$ , giao tuyến di chuyển và sinh ra hypebôlôit hai tầng. Mặt đó có hai tầng riêng biệt.

$a, b, c$  được gọi là các bán trục của mặt. Nếu  $a = b$ , giao tuyến là những đường tròn :

$$x^2 + y^2 = a^2 \left( \frac{h^2}{c^2} - 1 \right), z = h.$$

Lúc đó ta có mặt hypebôlôit hai tầng tròn xoay, sinh ra do hypebôn  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$  quay quanh trục  $Oz$  là trục cắt hypebôn.

### 4.3.5. Mặt parabolôit eliptic

Phương trình

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (4.3.8)$$

trong đó  $p, q$  là những hằng số dương, xác định một mặt mà ta gọi là *mặt parabolôit eliptic* (hình 33). Vì các biến  $x, y$  có mặt trong phương trình (4.3.8) với số mũ chẵn nên mặt cong nhận các mặt phẳng  $yOz, zOx$  làm mặt phẳng đối xứng.

Mặt phẳng  $xOy$  cắt mặt cong tại điểm  $(0, 0, 0)$ . Các mặt phẳng  $xOy, yOz$  theo thứ tự cắt nó theo các đường

$$x^2 = 2pz, y = 0$$

$$y^2 = 2qz, x = 0;$$

đó là những parabol nhận  $Oz$  làm trục (hình 33).

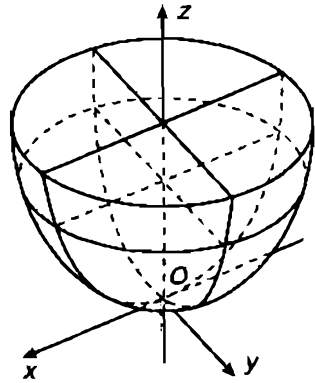
Cắt mặt cong bởi mặt phẳng  $z = h$  song song với mặt phẳng  $xOy$ , giao tuyến có phương trình

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, z = h \quad (4.3.9)$$

Nếu  $h > 0$ , đó là phương trình của một elip có các bán trục là  $\sqrt{2ph}, \sqrt{2qh}$ . Nếu  $h = 0$ , giao tuyến thu về một điểm; khi  $h$  tăng dần và lớn lên vô cùng, các bán trục của giao tuyến cũng tăng dần và lớn lên vô cùng. Khi  $h$  tăng từ 0 đến  $+\infty$ , giao tuyến di chuyển và sinh ra mặt parabolôit eliptic.

$p, q$  được gọi là những *tham số* của mặt. Nếu  $p = q$ , giao tuyến (4.3.9) là những đường tròn

$$x^2 + y^2 = 2ph, z = h.$$



Hình 33

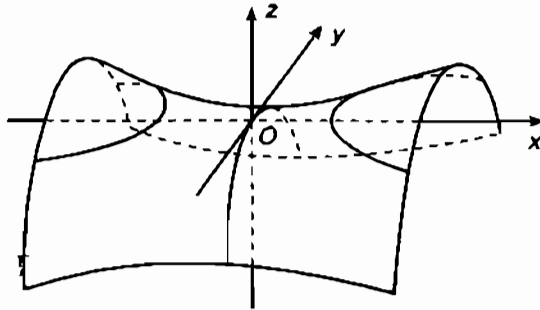
Lúc đó, mặt parabolôit elliptic là mặt tròn xoay do parabol  $x^2 = 2pz$  quay quanh trục  $Oz$  sinh ra.

#### 4.3.6. Mặt parabolôit hypebôlic

Phương trình

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (4.3.10)$$

trong đó  $p, q$  là những hằng số dương, là phương trình của một mặt mà ta gọi là *mặt parabolôit hypebôlic* (hình 34). Mặt đó nhận các mặt phẳng  $yOz, zOx$  làm mặt phẳng đối xứng.



Hình 34

Mặt phẳng  $zOx$  cắt mặt cong theo đường :

$$x^2 = 2pz, y = 0 \quad (4.3.11)$$

Đó là một parabol nhận  $Oz$  làm trục. Cắt mặt cong bởi những mặt phẳng  $x = h$  song song với mặt  $yOz$ , giao tuyến có phương trình

$$y^2 = -2q \left( z - \frac{h^2}{2p} \right), x = h \quad (4.3.12)$$

Đó là phương trình của những parabol có tham số  $q$ , có trục song song với  $Oz$ , quay bẻ lõm về phía  $z < 0$ ; có đỉnh nằm trên parabol (4.3.11). Khi  $h$  biến thiên từ  $-\infty$  đến  $+\infty$ , các parabol (4.3.12) di chuyển và sinh ra mặt parabolôit hypebôlic (hình 34)

Cắt mặt cong bởi những mặt phẳng  $z = h$  song song với mặt phẳng  $xOy$ , phương trình của giao tuyến là

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h, \quad z = h \quad (4.3.13)$$

Nếu  $h > 0$ , đó là phương trình của những hypebôn có trục thực nằm trong mặt phẳng  $zOx$  và song song với  $Ox$ , có bán trục thực bằng  $\sqrt{2ph}$ , có bán trục ảo bằng  $\sqrt{2qh}$ . Nếu  $h < 0$ , đó là phương trình của những hypebôn có trục thực nằm trong mặt phẳng  $yOz$  và song song với  $Oy$ , có bán trục thực bằng  $\sqrt{-2qh}$ , có bán trục ảo bằng  $\sqrt{-2ph}$ . Nếu  $h = 0$ , phương trình (4.3.13) có thể viết

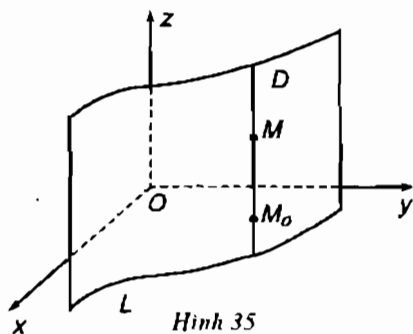
$$\left( \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) \left( \frac{x}{\sqrt{q}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 0, \quad z = 0.$$

Đó là phương trình của một cặp đường thẳng trong mặt phẳng  $xOy$  đi qua gốc  $O$ .

#### 4.3.7. Mặt trụ bậc hai

Mặt trụ là mặt được sinh ra bởi một đường thẳng  $D$  di chuyển luôn luôn song song với một phương cho trước và dựa vào một đường  $L$  cho trước. Đường  $L$  được gọi là *đường chuẩn*, đường thẳng  $D$  là *đường sinh* của mặt trụ.

Xét mặt  $S$  xác định bởi phương trình  $f(x, y) = 0$ . Phương trình ấy không chứa  $z$ . Giả sử  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  là một điểm trên mặt  $S$ , tọa độ của nó thoả mãn phương trình của mặt, tức là  $f(x_0, y_0) = 0$ . Mọi điểm  $M$  nằm trên đường thẳng đi qua  $M_0$  song song với  $Oz$  đều có tọa độ  $(x_0, y_0, z)$ , trong đó  $z$  là một số nào đó. Các tọa độ đó cũng thoả mãn phương trình của mặt  $S$  vì phương trình ấy không chứa  $z$ . Vậy nếu  $M_0$  nằm trên mặt  $S$  thì đường thẳng đi qua  $M_0$  song song với trục  $Oz$  cũng nằm trên mặt  $S$ . Mặt khác trong mặt phẳng  $xOy$  phương trình  $f(x, y) = 0$  xác định một đường  $L$  nào đó. Dĩ nhiên đường  $L$  nằm trên



Hình 35

mặt  $S$ . Vậy có thể xem mặt  $S$  được sinh ra bởi một đường thẳng đi chuyển luôn luôn song song với trục  $Oz$  và dựa vào đường  $L$ , đó là mặt trụ có đường sinh song song với trục  $Oz$  và nhận  $L$  làm đường chuẩn (hình 35).

Tương tự, phương trình  $g(y, z) = 0$  không chứa  $x$ , xác định một mặt trụ có đường sinh song song với  $Ox$ ; phương trình

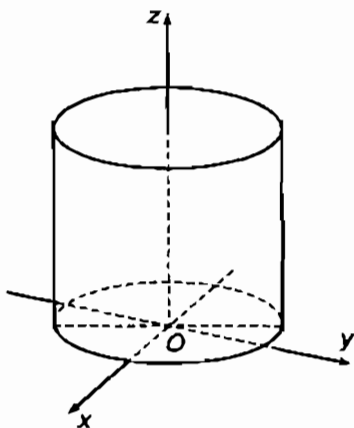
$h(x, z) = 0$  không chứa  $y$ , xác định một mặt trụ có đường sinh song song với  $Oy$ .

Những mặt trụ mà phương trình là bậc hai đối với tọa độ chạy được gọi là những mặt trụ bậc hai.

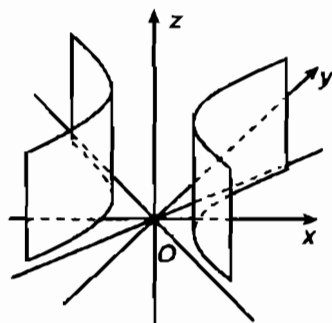
*Thí dụ 4.3.2. Phương trình*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

xác định mặt trụ có đường sinh song song với  $Oz$  và có đường chuẩn là một elip nằm trong mặt phẳng  $xOy$  (hình 36).



Hình 36



Hình 37

Nếu  $a = b$ , phương trình ấy xác định một mặt trụ tròn xoay.

*Thí dụ 4.3.3. Phương trình*

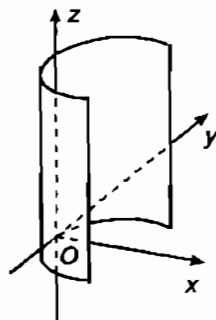
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

xác định mặt trụ có đường sinh song song với  $Oz$  và có đường chuẩn là một hypebôn nằm trong mặt phẳng  $xOy$  (hình 37).

*Thí dụ 4.3.4. Phương trình*

$$y^2 = 2px$$

xác định mặt trụ có đường sinh cùng phương với  $Oz$  và có đường chuẩn là một parabol nằm trong mặt phẳng  $xOy$  (hình 38).



Hình 38

#### 4.3.8. Mặt nón bậc hai

Mặt nón là mặt được sinh ra bởi một đường thẳng  $D$  di chuyển luôn luôn đi qua một điểm cố định  $I$  và dựa vào một đường  $L$  cho trước. Đường  $L$  được gọi là *đường chuẩn*, đường thẳng  $D$  là *đường sinh*, điểm  $I$  là *đỉnh* của mặt nón.

Xét mặt xác định bởi phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (4.3.14)$$

Mặt đó cắt mặt phẳng  $xOy$  tại gốc tọa độ. Giao tuyến của mặt đó với mặt phẳng  $yOz$  có phương trình

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad x = 0$$

hoặc

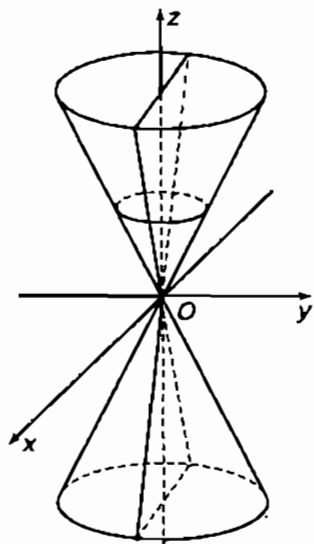
$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0, \quad x = 0.$$

Đó là phương trình của một cặp đường thẳng giao nhau trong mặt phẳng  $yOz$ . Mặt phẳng  $xOz$  cắt mặt con theo hai đường thẳng giao nhau

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0, \quad y = 0.$$

Cắt mặt cong bởi mặt phẳng  $z = h$  song song với mặt phẳng  $xOy$ , giao tuyến có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2 h^2} + \frac{y^2}{b^2 h^2} = 1, \quad z = h \quad (4.3.15)$$



Hình 39

Đó là phương trình của elip có các bán trục là  $\frac{ah}{c}$ ,  $\frac{bh}{c}$ . Khi  $h$  biến thiên từ  $-\infty$  đến  $+\infty$ , giao tuyến đó sẽ di chuyển và sinh ra mặt (4.3.14) (hình 39).

Ta sẽ chứng minh rằng nếu điểm  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  nằm trên mặt (4.3.14) thì đường thẳng  $OM_0$  cũng nằm trên mặt (4.3.14). Quả vậy, điểm  $M_0$  nằm trên mặt (4.3.14), do đó tọa độ  $(x_0, y_0, z_0)$  của nó thỏa mãn phương trình (4.3.14). Mọi điểm trên đường thẳng  $OM_0$  đều có tọa độ  $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)$ , trong đó  $\lambda$  là một số nào đó, do đó chúng đều nằm trên mặt (4.3.14) vì tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình

$$\frac{\lambda^2 x_0^2}{a^2} + \frac{\lambda^2 y_0^2}{b^2} - \frac{\lambda^2 z_0^2}{c^2} = \lambda^2 \left( \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0.$$

Vậy mặt (4.3.14) sinh ra bởi một đường thẳng di chuyển luôn luôn đi qua gốc tọa độ và dựa vào một elip cho bởi phương trình (4.3.15) với một trị  $h$  xác định nào đó. Đó là một mặt nón có đỉnh tại gốc tọa độ. Nếu  $a = b$ , ta có một mặt nón tròn xoay.

Chú ý rằng phương trình (4.3.14) là thuần nhất bậc hai đối với  $x, y, z$ , tức là mọi số hạng của nó đều là bậc hai đối với  $x, y, z$ . Mọi mặt mà phương trình là thuần nhất đối với  $x, y, z$  đều có tính chất vừa chứng minh trên, tức đều là mặt nón đỉnh  $O$ . Mọi mặt mà phương trình là thuần nhất đối với  $x - x_0, y - y_0, z - z_0$  đều là mặt nón đỉnh



108.108.  
108.108.  
108.108.

$(x_0, y_0, z_0)$ . Những mặt nón mà phương trình là bậc hai đối với  $x, y, z$  là những mặt nón bậc hai.

Chú ý 4.3.1. Về mặt bậc hai tổng quát xem chương 8, mục 8.6.2.

BÀI TẬP : 4.5 – 4.11.

## BÀI TẬP CHƯƠNG IV

4.1. Vẽ các đường biểu diễn của

a)  $y = 2x^2 - 4x + 8$  ;

b)  $y^2 + 8y - 2x + 12 = 0$ .

4.2. Cho phương trình  $y = \frac{2x + 3}{x + 4}$ . Tìm phép tịnh tiến hệ trục tọa độ sao cho trong hệ mới phương trình không chứa các số hạng bậc nhất.

4.3. Cho phương trình  $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x - 4 = 0$ . Phải quay hệ trục tọa độ một góc bằng bao nhiêu để cho phương trình trong hệ mới không có số hạng chéo.

4.4. Đưa các phương trình sau về dạng chính tắc và vẽ đường biểu diễn của chúng :

a)  $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$  ;

b)  $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$  ;

c)  $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$  ;

d)  $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ .

4.5. Tìm ý nghĩa hình học của các phương trình sau :

a)  $y + 2 = 0$  ;

b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  ;

c)  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 49$  ;

d)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0$  ;

$$e) x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 5 = 0 ;$$

$$g) x - y = 0 ;$$

$$h) x + z = 0 ;$$

$$i) xyz = 0 ;$$

$$k) x^2 - 4x = 0 ;$$

$$l) yz + z^2 = 0.$$

**4.6.** Xác định tâm và bán kính của các mặt cầu sau :

$$a) x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0 ;$$

$$b) x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10 = 0 ;$$

$$c) x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 2z + 41 = 0.$$

**4.7.** Tìm tâm và bán kính của đường tròn

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 7)^2 + (z + 1)^2 = 36 \\ 3x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

**4.8.** Chứng tỏ rằng các mặt phẳng  $x - 2 = 0$ ,  $y = 3$ ,  $z = 1$  cắt mặt elipxôit

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$$

theo các elip. Tính các bán trục và xác định các đỉnh của chúng. Vẽ các giao tuyến ấy.

**4.9.** Tìm giao tuyến của mặt hypebôloit một tầng

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$$

với các mặt phẳng tọa độ, với các mặt phẳng  $z = 1$ ,  $z = 2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$ .

**4.10.** Tìm giao tuyến của mặt

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$$

với các mặt phẳng tọa độ. Chứng tỏ rằng mặt phẳng  $y + 6 = 0$  cắt mặt đó theo một parabol; tìm tham số và đỉnh của nó.

4.11. Tìm giao tuyến của mặt

$$y^2 + z^2 = x$$

với các mặt phẳng tọa độ. Tìm phương trình của hình chiếu trên mặt phẳng  $xOy$  của giao tuyến của mặt đó với mặt phẳng  $x + 2y - z = 0$ .

**ĐÁP SỐ**

4.1. a)  $X^2 = \frac{Y}{2}$ , với  $X = x - 1$ ,  $Y = y - 6$ ;

b)  $Y^2 = 2X$ , với  $X = x + 2$ ,  $Y = y + 4$ .

4.2. Tịnh tiến sao cho gốc đến điểm  $(-4, 2)$ .

4.3.  $\frac{\pi}{4}$ .

4.4. a)  $X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1$ , với  $x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$ ,  $y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$ .

$$x' = X + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y' = Y - \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

b)  $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{9} = 1$  với  $x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$ .

$$y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}; \quad x' = X, \quad y' = Y + \sqrt{2}.$$

c)  $X^2 - 4Y^2 = 0$ , với  $x = \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}}$ .

$$y = \frac{-3x' + y'}{\sqrt{10}}; \quad x' = X - \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad y' = Y - \frac{6}{\sqrt{10}}.$$

108.101

$$d) Y^2 = 2X \text{ với } x = \frac{-4x' + 3y'}{5}$$

$$y = \frac{-3x' - 4y'}{5}; x' = X - 3, y' = Y + 2.$$

4.5. a) Mặt phẳng song song với mặt phẳng toạ độ  $xOz$ , cách nó một khoảng  $d = 2$ , về phía  $y < 0$ ;

b) Mặt cầu tâm tại gốc toạ độ, có bán kính  $R = 5$ ;

c) Mặt cầu tâm tại  $(2, -3, 5)$ , có bán kính  $R = 7$ ;

d) Điểm gốc toạ độ;

e) Phương trình không có ý nghĩa hình học;

g) Mặt phẳng đi qua trục  $Oz$  và đường thẳng  $x = y$  trong mặt phẳng  $xOy$ ;

h) Mặt phẳng đi qua trục  $Oy$  và đường thẳng  $x = -z$  trong mặt phẳng  $zOx$ ;

i) Ba mặt phẳng toạ độ;

k) Mặt phẳng  $yOz$  và mặt phẳng song song với nó, cách nó một khoảng  $d = 4$  về phía  $x > 0$ ;

l) Mặt phẳng  $xOy$  và mặt phẳng đi qua trục  $Ox$  và đường thẳng  $y + z = 0$  trong mặt phẳng  $yOz$ .

4.6. a) Tâm  $(3, -4, -1)$ , bán kính bằng 4;      b) Mặt cầu ảo;

c) Tâm  $(2, -6, 1)$ , bán kính bằng 0.

4.7. Tâm  $(1, 6, 0)$ , bán kính bằng 5.

4.8.  $3, \sqrt{3}, (2, 3, 0), (2, -3, 0), (2, 0, \sqrt{3}), (2, 0, -\sqrt{3})$ ;  $2, 1, (2, 3, 0), (-2, 3, 0), (0, 3, 1), (0, 3, -1)$ ;  $2\sqrt{3}, 3, (2\sqrt{3}, 0, 1), (-2\sqrt{3}, 0, 1), (0, 3, 1), (0, -3, 1)$ .

$$4.9. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1, z = 0; \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1, x = 0;$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{4} = 1, y = 0; \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1, z = 1;$$

$$\frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{32} = 1, \quad z = 2; \quad \frac{y^2}{140} - \frac{z^2}{35} = 1, \quad x = 1;$$

$$\frac{y^2}{128} - \frac{z^2}{32} = 1, \quad x = 2;$$

$$\frac{x^2}{135} - \frac{z^2}{15} = 1, \quad y = 1;$$

$$\frac{x^2}{27} - \frac{z^2}{3} = 1, \quad y = 2.$$

**4.10.**  $y^2 + 24z = 0, \quad x = 0; \quad x^2 = 30z, \quad y = 0; \quad \frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{y}{2} = 0,$

$\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{2} = 0, \quad z = 0, \quad y = -6,$  parabol có tham số bằng 15, đỉnh

$\left(0, -6, -\frac{3}{2}\right).$

**4.11.**  $(0, 0, 0); \quad z^2 = x, \quad y = 0; \quad y^2 = x, \quad z = 0;$

$x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0, \quad z = 0.$

## Chương V

# KHÔNG GIAN VECTƠ – KHÔNG GIAN EUCLID

## 5.1. KHÔNG GIAN VECTƠ – ĐỊNH NGHĨA VÀ THÍ DỤ

### 5.1.1. Nhận xét mở đầu

Có nhiều tập hợp mà các phần tử có thể "cộng" với nhau và "nhân" với một số. Sau đây là một số thí dụ :

Tập các vectơ hình học

Tập các hàm số liên tục

Tập các đa thức

Tập các ma trận cùng cỡ.

Để nghiên cứu chúng theo một quan điểm thống nhất người ta xây dựng khái niệm *không gian vectơ* tổng quát. Sau đó mỗi tập trên chỉ là một trường hợp cụ thể, nó sẽ có tất cả những tính chất của không gian vectơ tổng quát.

### 5.1.2. Khái niệm không gian vectơ

**Định nghĩa 5.1.1.** Xét tập  $V$  khác rỗng mà mỗi phần tử ta quy ước gọi là một vectơ và trường số thực  $\mathbf{R}$ . Giả sử trong  $V$  ta định nghĩa được hai phép toán : phép cộng hai vectơ và phép nhân một vectơ với một số thực.

*Phép cộng hai vectơ* là một luật hợp thành trong trên  $V$  cho phép tạo ra từ một cặp vectơ  $x, y \in V$  một vectơ duy nhất gọi là *tổng* của chúng, kí hiệu là  $x + y$ .

Phép nhân một vectơ với một số, còn gọi là *phép nhân với vô hướng*, là một luật hợp thành ngoài trên  $V$  cho phép tạo ra từ một vectơ  $x \in V$  và một số thực  $k \in \mathbf{R}$  một vectơ duy nhất gọi là *tích* của chúng, kí hiệu là  $kx$ .

Nếu 10 yêu cầu sau được thoả mãn với mọi  $x, y, z \in V$  và mọi  $k, l \in \mathbf{R}$  thì tập  $V$  được gọi là một *không gian vectơ trên trường  $\mathbf{R}$*  :

- (1) Nếu  $x$  và  $y \in V$  thì  $x + y \in V$
- (2)  $x + y = y + x, \forall x, y \in V$
- (3)  $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in V$
- (4) Tồn tại vectơ  $\theta \in V$  sao cho

$$\theta + x = x + \theta = x, \forall x \in V$$

Phần tử  $\theta$  gọi là *phần tử trung hoà của phép + (hay của  $V$ )*.

- (5) Với mỗi  $x \in V$  tồn tại vectơ  $-x \in V$  sao cho

$$x + (-x) = (-x) + x = \theta$$

Phần tử  $-x$  gọi là *phần tử đối xứng (hay phần tử đối)* của  $x$ .

- (6) Nếu  $k \in \mathbf{R}$  và  $x \in V$  thì  $kx \in V$
- (7)  $k(x + y) = kx + ky$
- (8)  $(k + l)x = kx + lx$
- (9)  $k(lx) = (kl)x$
- (10)  $1.x = x$

*Chú ý 5.1.1.* Yêu cầu (1) nói lên tính đóng kín của  $V$  đối với phép cộng vectơ, cũng nói tắt là tính đóng kín của phép cộng vectơ.

Yêu cầu (6) nói lên tính đóng kín của  $V$  đối với phép nhân với vô hướng, cũng nói tắt là tính đóng kín của phép nhân với vô hướng.

Yêu cầu (2) nói lên tính giao hoán của phép cộng vectơ.

Yêu cầu (3) nói lên tính kết hợp của phép cộng vectơ.

*Chú ý 5.1.2.* Mười yêu cầu (1) – (10) gọi là mười tiên đề của không gian vectơ.

Có tài liệu người ta chỉ nêu 8 tiên đề (2) (3) (4) (5) (7) (8) (9), (10), xem các tiên đề (1) và (6) đã bao hàm trong các định nghĩa của hai phép tính cộng hai vectơ và nhân một vectơ với một số.

*Chú ý 5.1.3.* Nếu thay  $\mathbf{R}$  bằng trường số phức  $\mathbf{C}$  thì ta có không gian vectơ trên trường số phức. Ở giáo trình này ta chỉ quan tâm đến các không gian vectơ trên trường số thực.

### 5.1.3. Thí dụ

#### *Thí dụ 5.1.1.*

Gọi  $R_2$  ( $R_2$  chứ không phải  $\mathbf{R}^2$ ) là tập các vectơ hình học trong mặt phẳng có chung gốc hay là tập các vectơ hình học tự do trong mặt phẳng trong đó ta đồng nhất các vectơ bằng nhau (tức là các vectơ cùng phương, cùng hướng, cùng độ dài xem là một). Trong  $R_2$  ta xét phép cộng vectơ theo quy tắc tam giác và phép nhân vectơ với một số thực thông thường.

Cả 10 tiên đề (1) – (10) đều thoả mãn – phần tử trung hoà là vectơ không  $\vec{0}$ , phần tử đối của vectơ  $\vec{a}$  là  $-\vec{a}$ .

Vậy  $R_2$  là một không gian vectơ.

Một cách tương tự tập  $R_3$  các vectơ hình học trong không gian có chung gốc hay các vectơ hình học tự do trong không gian (trong đó ta đồng nhất các vectơ bằng nhau) với phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với một số thực là một không gian vectơ.

*Thí dụ 5.1.2.* Xét  $\mathbf{R}^n$  là tập mà mỗi phần tử là một bộ  $n$  số thực có thứ tự  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , còn gọi là một vectơ  $n$  thành phần. Xét

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ và } y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Phép cộng vectơ và phép nhân với vô hướng định nghĩa như sau

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \tag{5.1.1}$$



$$kx = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n), k \in \mathbf{R} \quad (5.1.2)$$

Ngoài ra  $x = y$  khi và chỉ khi  $x_i = y_i, \forall i$

Ta kiểm tra lại các tiên đề.

Công thức (5.1.1) chứng tỏ  $x + y \in \mathbf{R}^n$ , đó là tiên đề (1).

Từ (5.1.1) ta suy ra

$$y + x = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n)$$

Vậy  $y + x = x + y$ , đó là tiên đề (2).

Một cách tương tự, ta suy ra tiên đề (3) thoả mãn.

Tiên đề (4) thoả mãn với phần tử trung hòa là

$$\theta = (0, 0, \dots, 0)$$

Tiên đề (5) thoả mãn với phần tử đối của  $x \in \mathbf{R}^n$  là

$$-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

Công thức (5.1.2) chứng tỏ  $kx \in V$ , đó là tiên đề (6).

Để kiểm tra tiên đề (7) ta sử dụng (5.1.1) và (5.1.2)

$$\begin{aligned} k(x + y) &= (k(x_1 + y_1), k(x_2 + y_2), \dots, k(x_n + y_n)) = \\ &= (kx_1 + ky_1, kx_2 + ky_2, \dots, kx_n + ky_n) \\ &= (kx_1, kx_2, \dots, kx_n) + (ky_1, ky_2, \dots, ky_n) \\ &= kx + ky \end{aligned}$$

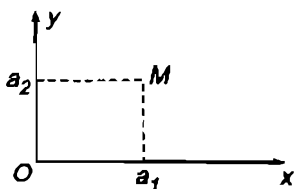
Một cách tương tự ta suy ra các tiên đề (8), (9) thoả mãn. Đối với tiên đề (10) ta viết theo (5.1.2)

$$1x = (1x_1, 1x_2, \dots, 1x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x.$$

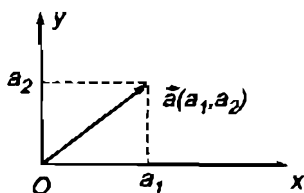
Tóm lại, cả 10 tiên đề (1) – (10) đều thoả mãn. Vậy  $\mathbf{R}^n$  là một không gian vectơ.

*Chú ý 5.1.4.*

1) Mỗi cặp số  $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$  có hai ý nghĩa hình học : Có thể biểu diễn nó bằng một điểm  $M$  trong mặt phẳng tọa độ mà  $a_1$  là hoành độ và  $a_2$  là tung độ (hình 40).



Hình 40



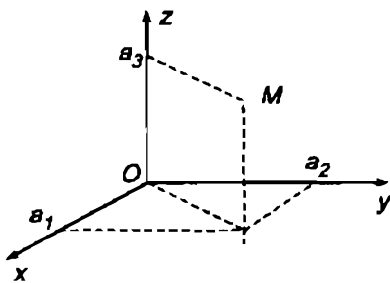
Hình 41

Cũng có thể biểu diễn nó như là một vectơ mà  $a_1$  là thành phần thứ nhất và  $a_2$  là thành phần thứ hai (hình 41).

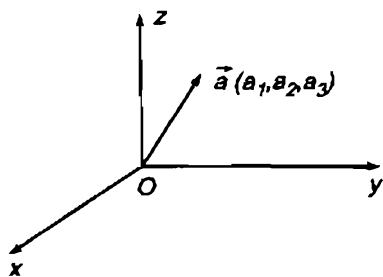
Với cách biểu diễn thứ nhất ta có một tương ứng 1-1 giữa  $\mathbf{R}^2$  và tập các điểm của mặt phẳng toạ độ.

Với cách biểu diễn thứ hai ta có một tương ứng 1-1 giữa  $\mathbf{R}^2$  và  $R_2$  (xem thí dụ 5.1.1).

2) Mỗi bộ ba số  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$  có hai ý nghĩa hình học. Có thể biểu diễn nó bằng một điểm  $M$  trong không gian toạ độ mà  $a_1$  là hoành độ,  $a_2$  là tung độ và  $a_3$  là cao độ (hình 42). Cũng có thể biểu diễn nó như là một vectơ  $\vec{a}$  mà  $a_1$  là thành phần thứ nhất,  $a_2$  là thành phần thứ hai và  $a_3$  là thành phần thứ ba (hình 43). Với cách biểu diễn thứ nhất ta có một tương ứng 1-1 giữa  $\mathbf{R}^3$  và tập các điểm của không gian toạ độ. Với cách biểu diễn thứ hai ta cũng có một tương ứng 1-1 giữa  $\mathbf{R}^3$  và  $R_3$  (xem thí dụ 5.1.1).



Hình 42



Hình 43

3) Mỗi phần tử  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  cũng có thể xem là một điểm  $n$  toạ độ hay một vectơ  $n$  thành phần.

*Thí dụ 5.1.3.* Gọi  $C[a, b]$  là tập các hàm số liên tục trên  $a \leq t \leq b$ ,  $a$  và  $b$  cho trước. Xét

$$f \in C[a, b] \text{ và } g \in C[a, b]$$

Ta nói  $f = g$  nếu  $f(t) = g(t), \forall t \in [a, b]$

Trên  $C[a, b]$  ta định nghĩa phép cộng  $f + g$  và phép nhân  $kf, k \in \mathbb{R}$  như sau :

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

$$(kf)(t) = kf(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

Thế thì có

$$f + g \in C[a, b], \quad kf \in C[a, b]$$

Đó là các tiên đề (1) và (6). Các tiên đề còn lại cũng thoả mãn (bạn đọc kiểm tra). Phần tử trung hoà là hàm số đồng nhất không, tức là bằng 0,  $\forall t \in [a, b]$ . Phần tử đối xứng của hàm  $f$  là  $-f$ :

$$(-f)(t) = -f(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

Vậy  $C[a, b]$  là một không gian vectơ.

*Chú ý 5.1.5.* Có thể xét tập  $C(-\infty, +\infty)$  gồm các hàm số liên tục trên  $(-\infty, +\infty)$ . Nó cũng là một không gian vectơ.

*Thí dụ 5.1.4.* Xét  $W \subset C[a, b]$  gồm những hàm số có giá trị tại  $t = 0$  là 1 với hai phép tính cộng vectơ và nhân với vô hướng đã định nghĩa trong  $C[a, b]$ . Lấy

$$f(t) = t + 1 \in W, \quad g(t) = t^2 + 1 \in W$$

thì  $(f + g)(t) = t + 1 + t^2 + 1 = t^2 + t + 2$

nên  $(f + g)(0) = 2$

Do đó  $f + g \notin W$ . Tiên đề (1) không thoả mãn. Vậy  $W$  không phải là một không gian vectơ.

*Thí dụ 5.1.5.* Gọi  $P_n$  là tập các đa thức có bậc  $\leq n$ ,  $n$  là một số nguyên dương xác định :

$$P_n = \{p \mid p := a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n\}$$

Vì đa thức cũng là một hàm số liên tục nên trong  $P_n$  ta định nghĩa phép cộng đa thức và nhân đa thức với một số thực như phép cộng hàm số và nhân hàm số với một số thực trong  $C[a, b]$  ở thí dụ 5.1.3.

Từ đó ta suy ra : Nếu  $k \in \mathbf{R}$  và

$$p = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \in P_n$$

$$q = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_nt^n \in P_n$$

thì

$$p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_n + b_n)t^n \in P_n$$

$$kp = ka_0 + (ka_1)t + \dots + (ka_n)t^n \in P_n$$

Do đó các tiên đề (1) và (6) thoả mãn.

Có thể chứng minh được rằng 8 tiên đề còn lại cũng thoả mãn với phần tử trung hoà là đa thức không :

$$0 + 0t + 0t^2 + \dots + 0t^n$$

và phần tử đối xứng của

$$p = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$$

là

$$-p = -a_0 - a_1t - \dots - a_nt^n$$

Vậy  $P_n$  là một không gian vectơ.

*Chú ý 5.1.6.* Xem thêm các mục 2.6.5 và 2.6.6 về đa thức đồng nhất không và các đa thức đồng nhất.

*Thí dụ 5.1.6.* Theo kết quả ở thí dụ 5.1.5 thì tập  $P_2$  các đa thức bậc nhỏ hơn hay bằng 2 là một không gian vectơ. Bây giờ xét  $P_2^*$  các đa thức có bậc bằng 2 :  $P_2^* = \{p^* \mid p^* = a_0 + a_1t + a_2t^2, a_2 \neq 0\}$ . Ta thử lấy

$$p^* = 1 + 2t + t^2 \in P_2^*$$

$$q^* = 2 - 3t - t^2 \in P_2^*$$

thì thấy .

$$p^* + q^* = 3 - t \notin P_2^*$$

Như vậy tiên đề (1) không thoả mãn, do đó  $P_2^*$  không phải là một không gian vectơ.

*Thí dụ 5.1.7.* Gọi  $\mathcal{M}_{m \times n}$  là tập các ma trận cỡ  $m \times n$  với hai phép tính cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực đã định nghĩa ở 3.1.4 và 3.1.5.

Dễ thấy rằng cả 10 tiên đề (1)–(10) đều thoả mãn (bạn đọc kiểm tra lại).

Vậy  $\mathcal{M}_{m \times n}$  là một không gian vectơ.

#### 5.1.4. Một số tính chất đầu tiên của không gian vectơ

Bất kì không gian vectơ nào cũng có tính chất sau :

**Định lí 5.1.1.** (a) *Phần tử trung hoà  $\theta$  là duy nhất.*

(b) *Phần tử đối xứng của bất kì  $x$  nào thuộc  $V$  cũng là duy nhất.*

(c)  $\forall x \in V$  ta đều có  $0x = \theta$ .

(d)  $\forall x \in V$  ta đều có  $-x = (-1)x$ .

e)  $\forall k \in \mathbf{R}$  ta đều có  $k\theta = \theta$ .

(f) với  $x \in V$ , và  $k \in \mathbf{R}$  ta có :

Nếu  $kx = \theta$  thì hoặc  $k = 0$  hoặc  $x = \theta$ .

*Chứng minh* : Hai tính chất (a) và (b) suy từ khẳng định ở chú ý 5.1.4 nói rằng  $(V, +)$  là một nhóm.

Để chứng minh (c) ta viết

$$\begin{aligned}\theta + 0x &= 0x = (0 + 0)x \\ &= 0x + 0x\end{aligned}$$

rồi giản ước

$$\theta = 0x$$

Để chứng minh (d) ta viết

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0x = \theta$$

và

$$(-1)x + x = \theta$$

Suy ra  $(-1)x$  là vectơ đối của  $x$ , tức là  $-x$ .

Để chứng minh (e) ta viết

$$0\theta = \theta$$

Suy ra

$$\begin{aligned}k\theta &= k(0\theta) \\ &= (k.0)\theta \\ &= 0\theta \\ &= \theta.\end{aligned}$$

Để chứng minh (f) ta giả sử  $kx = \theta$ .

Nếu  $k = 0$  thì  $0x = \theta$  theo (c)

Nếu  $k \neq 0$  thì tồn tại  $k^{-1}$ . Do đó có

$$\begin{aligned}k^{-1}(kx) &= k^{-1}\theta \\ (k^{-1}k)x &= \theta \\ x &= \theta\end{aligned}$$

Vậy nếu  $kx = \theta$  thì hoặc  $k = 0$  hoặc  $x = \theta$ .

*Chú ý 5.1.7.* Bây giờ ta có thể định nghĩa phép trừ :

$$x - y := x + (-y)$$

Khi đó ta có

$$x = y \Leftrightarrow x - y = \theta.$$

*Chú ý 5.1.8.* Các tính chất (a) – (f) ở định lí 5.1.1 đúng trong mọi không gian vectơ cụ thể, ta có kết luận ấy mà không cần phải kiểm tra lại trên từng không gian cụ thể vì ta đã chứng minh định lí 5.1.1 với giả thiết  $V$  là một không gian vectơ bất kì (thỏa mãn 10 tiên đề của không gian vectơ). Đó là lợi ích của quan điểm tiên đề.

**BÀI TẬP : 5.1.**

## 5.2. KHÔNG GIAN CON VÀ HỆ SINH

### 5.2.1. Định nghĩa không gian con

**Định nghĩa 5.2.1.**  $V$  là một không gian vectơ với hai phép tính : cộng vectơ và nhân vectơ với một số,  $W$  là một tập con của  $V$ . Nếu với hai phép tính trên,  $W$  cũng là một không gian vectơ thì  $W$  được gọi là một không gian con của  $V$ .

Như vậy muốn chứng tỏ  $W \subset V$  là một không gian con của  $V$  ta phải chứng minh rằng bản thân  $W$  với hai phép tính : cộng vectơ và nhân vectơ với một số đã định nghĩa trong  $V$ , cũng thỏa mãn 10 tiên đề của không gian vectơ. Định lí sau giúp cho việc chứng minh  $W \subset V$  là một không gian con của  $V$  đơn giản hơn.

### 5.2.2. Điều kiện để $W \subset V$ là không gian con

**Định lí 5.2.1.**  $V$  là một không gian vectơ,  $W \subset V$ ,  $W \neq \emptyset$ . Muốn cho  $W$  là không gian con của  $V$  điều kiện cần và đủ là hai tính chất sau được thỏa mãn :

(a) Nếu  $u$  và  $v \in W$  thì  $u + v \in W$  (tức là  $W$  đóng kín đối với phép cộng vectơ).

(b) Nếu  $k \in \mathbf{R}$ ,  $u \in W$  thì  $ku \in W$  (tức là  $W$  đóng kín đối với phép nhân vectơ với một số thực).

*Chứng minh* : 1) Nếu  $W$  là không gian con của  $V$  thì bản thân nó là một không gian vectơ, nên thoả mãn cả 10 tiên đề trong đó tiên đề (1) và (6) chính là (a) và (b).

2) Ngược lại, giả sử (a) và (b) thoả mãn thì đó là các tiên đề (1) và (6). Trong các tiên đề còn lại các tiên đề (2), (3), (7), (8), (9), (10) đã thoả mãn trong  $V$  nên cũng thoả mãn trong  $W$ . Do đó để hoàn thành ta chỉ còn phải chứng minh rằng các tiên đề (4) và (5) cũng thoả mãn trong  $W$ .

Giả sử  $u \in W$ . Theo giả thiết (b),  $ku \in W$  với mọi số  $k \in \mathbf{R}$ . Với  $k = 0$  ta có  $0u = \theta \in W$ . Với  $k = -1$  ta có  $(-1)u = -u \in W$  (theo định lí 5.1.1). Sau đó trong  $W$  ta có

$$u + \theta = \theta + u = u$$

$$(-u) + u = u + (-u) = (1 + (-1))u = 0u = \theta$$

vì  $0u = \theta$  theo định lí 5.1.1.

Vậy  $W$  là một không gian vectơ.

### 5.2.3. Thí dụ

*Thí dụ 5.2.1.*  $V$  là một không gian vectơ thì bản thân  $V$  có thể xem là một không gian con của  $V$ .

Tập chỉ gồm một phần tử trung hoà  $\theta$ ,  $\{\theta\}$  thoả mãn

$$\theta + \theta = \theta, k\theta = \theta \text{ mà } \theta \in \{\theta\}$$

Vậy tập  $\{\theta\}$  cũng là một không gian con của  $V$ .

*Thí dụ 5.2.2.* Mỗi phần tử của  $\mathbf{R}^2$  là một cặp số  $u = (x_1, y_1)$  biểu diễn bằng một điểm trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$  (hình 44) (Xem chú ý 5.1.4).



Xét  $W$  là tập điểm thuộc đường thẳng đi qua gốc tọa độ, có phương trình

$$Ax_1 + By_1 = 0$$

$A$  và  $B$  không đồng thời  $= 0$ .

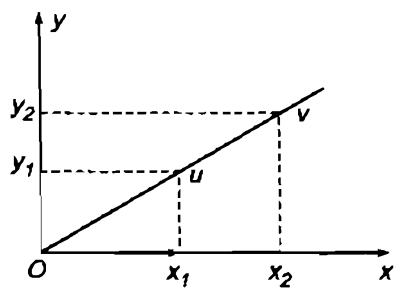
Giả sử  $u = (x_1, y_1)$  và  $v = (x_2, y_2)$  đều  $\in W$  và  $k \in \mathbf{R}$  thì có  $Ax_1 + By_1 = 0, Ax_2 + By_2 = 0$ . Do đó

$$A(x_1 + x_2) + B(y_1 + y_2) = 0, A(kx_1) + B(ky_1) = 0$$

Vậy  $u + v \in W, ku \in W$ . Theo định lí 5.2.1,  $W$  là không gian con của  $\mathbf{R}^2$ .

*Thí dụ 5.2.3.* Theo thí dụ 5.1.7, tập  $\mathcal{M}_2 \times 2$  các ma trận vuông cấp 2 là một không gian vectơ. Bây giờ xét  $W$  là tập các ma trận cấp 2 có dạng

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, a \text{ và } b \in \mathbf{R}$$



Hình 44

Để thấy rằng  $W$  đóng kín đối với phép cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực (bạn đọc kiểm tra lại). Vậy  $W$  là một không gian con của  $\mathcal{M}_2 \times 2$ .

*Thí dụ 5.2.4.* Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất  $m$  phương trình  $n$  ẩn ở dạng ma trận  $Ax = 0$ . Gọi  $W$  là tập nghiệm của hệ. Mỗi nghiệm là một bộ  $n$  số thực

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . Vậy  $W \subset \mathbf{R}^n$ . Giả sử  $x$  và  $y \in W$  thì  $A(x + y) = Ax + Ay = 0, A(cx) = cAx = 0, (c \in \mathbf{R})$ .

Vậy  $W$  đóng kín đối với phép cộng và nhân với một số thực.

Do đó  $W$  là một không gian con của  $\mathbf{R}^n$ .

### 5.2.4. Tổ hợp tuyến tính của một họ vectơ

**Định nghĩa 5.2.2.**  $V$  là một không gian vectơ,  $S$  là một họ vectơ của  $V$  :

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

*Biểu thức*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

$$c_i = \text{const} \in \mathbf{R}$$

là một vectơ thuộc  $V$  và được gọi là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ của họ  $S$ , hay cũng có thể nói gọn là tổ hợp tuyến tính của họ  $S$ .

**Thí dụ 5.2.5.** Vectơ  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ  $i = (1, 0)$  và  $j = (0, 1)$  vì

$$xi + yj = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y).$$

Trong  $\mathbf{R}^2$  vectơ  $(7, -1)$  là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ  $x_1 = (2, 1)$  và  $x_2 = (1, -1)$  vì

$$2x_1 + 3x_2 = 2(2, 1) + 3(1, -1) = (4, 2) + (3, -3) = (7, -1).$$

**Thí dụ 5.2.6.** Vectơ  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$ ,  $k = (0, 0, 1)$  vì

$$xi + yj + zk = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, y, z).$$

**Thí dụ 5.2.7.** Hãy biểu diễn vectơ  $(7, -3) \in \mathbf{R}^2$  thành tổ hợp tuyến tính của  $x_1 = (1, 1)$  và  $x_2 = (1, -1)$ .

*Giải.* Ta đi tìm các hằng số  $c_1$  và  $c_2$  để

$$c_1x_1 + c_2x_2 = (7, -3)$$

nghĩa là  $(7, -3) = c_1(1, 1) + c_2(1, -1)$

$$= (c_1, c_1) + (c_2, -c_2)$$

$$= (c_1 + c_2, c_1 - c_2)$$

Ta thu được  $c_1 = 2, c_2 = 5$ . Vậy

$$(7, -3) = 2(1, 1) + 5(1, -1).$$

### 5.2.5. Không gian con sinh bởi một họ vectơ

**Định nghĩa 5.2.3.**  $V$  là một không gian vectơ,

$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  là một họ vectơ của  $V$ . Ta gọi tập tất cả những tổ hợp tuyến tính của các vectơ của  $S$  là bao tuyến tính của  $S$ , kí hiệu là  $\text{span}(S)$ .

**Định lý 5.2.2.**  $W = \text{span}(S)$  là một không gian con của  $V$ .

Chứng minh : Vì  $x_1 = 1x_1$  nên  $x_1 \in W$ , do đó  $W \neq \emptyset$ .

Bây giờ giả sử

$$x = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \in W, \quad y = d_1x_1 + \dots + d_nx_n \in W,$$

$$k \in \mathbf{R}$$

khi đó ta có

$$x + y = (c_1 + d_1)x_1 + \dots + (c_n + d_n)x_n \in W$$

$$kx = (kc_1)x_1 + \dots + (kc_n)x_n \in W.$$

Vậy  $W$  đóng kín đối với hai phép tính trong  $V$ . Theo định lý 5.2.1,  $W$  là một không gian con của  $V$ .

Trường hợp  $W$  trùng với  $V$  dẫn đến khái niệm hệ sinh của không gian vectơ như dưới đây.

### 5.2.6. Định nghĩa hệ sinh của không gian vectơ

**Định nghĩa 5.2.4.**  $V$  là một không gian vectơ,  $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ .

Nếu  $\text{span}(S) = V$ , tức là nếu mọi  $x \in V$  đều có biểu diễn

$$x = c_1x_1 + \dots + c_nx_n,$$

thì nói họ  $S$  sinh ra  $V$  hay họ  $S$  là một hệ sinh của  $V$ .

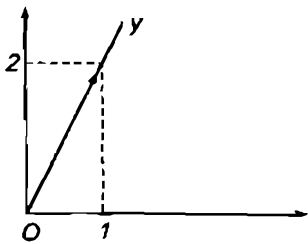
**Thí dụ 5.2.8.** Trong  $\mathbf{R}^2$  xét  $i = (1, 0)$  và  $j = (0, 1)$ . Mọi  $x \in \mathbf{R}^2$  có dạng  $x = (x_1, x_2)$  nên viết được như sau

$$x = (x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1i + x_2j,$$

nghĩa là  $x$  là một tổ hợp tuyến tính của  $i$  và  $j$ .

Vậy họ  $\{i, j\}$  sinh ra  $\mathbf{R}^2$  hay họ  $\{i, j\}$  là một hệ sinh của  $\mathbf{R}^2$ .

**Thí dụ 5.2.9.** Bây giờ xét  $x = (1, 2) \in \mathbf{R}^2$ . Mọi tổ hợp tuyến tính của  $x$  có dạng  $cx$ ,  $c \in \mathbf{R}$ . Vậy nếu  $y = (y_1, y_2) \in \text{span}(x) = \{cx\}$  thì có  $(y_1, y_2) = c(1, 2)$ .



Hình 45

Ta suy ra

$$y_2 = 2y_1.$$

Đó là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ (hình 45).

Vậy  $\text{span}(1, 2)$  chỉ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Vectơ  $x = (1, 2)$  chỉ sinh ra một đường thẳng đi qua gốc tọa độ mà không sinh ra cả  $\mathbf{R}^2$ .

**Thí dụ 5.2.10.** Bây giờ xét

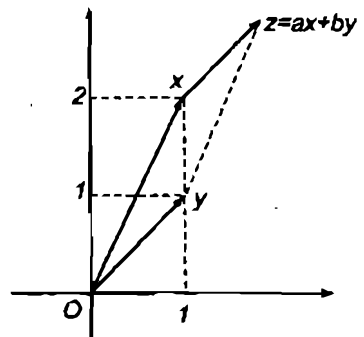
$$x = (1, 2)$$

và  $y = (1, 1)$

của  $\mathbf{R}^2$ .

Ta thử xét xem họ  $\{x, y\}$  có sinh ra  $\mathbf{R}^2$  không. Muốn thế ta xét  $z = (z_1, z_2)$  bất kì của  $\mathbf{R}^2$  và đi tìm  $a$  và  $b$  thuộc  $\mathbf{R}$  để có  $z = ax + by$ , nghĩa là

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) &= a(1, 2) + b(1, 1) \\ &= (a + b, 2a + b) \end{aligned}$$



Hình 46

Ta suy ra

$$\begin{cases} a + b = z_1 \\ 2a + b = z_2 \end{cases}$$

Hệ này có định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 1.2 = -1 \neq 0$$

nên luôn có nghiệm. Vậy họ  $\{x, y\}$  là một hệ sinh của  $\mathbf{R}^2$  (hình 46).

BÀI TẬP : 5.2 – 5.12.

### 5.3. HỌ VECTƠ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH VÀ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

#### 5.3.1. Khái niệm độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

**Định nghĩa 5.3.1.**  $V$  là một không gian vectơ,  $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ . Xét điều kiện

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \theta \quad (5.3.1)$$

Nếu điều kiện (5.3.1) chỉ xảy ra khi  $c_1 = 0, \dots, c_n = 0$  thì ta nói họ  $S$  độc lập tuyến tính.

Nếu tồn tại các số thực  $c_1, \dots, c_n$  không đồng thời bằng 0 để (5.3.1) thoả mãn thì ta nói họ  $S$  phụ thuộc tuyến tính.

#### 5.3.2. Thí dụ

**Thí dụ 5.3.1.** Xét xem họ  $\{i, j\}$ ,  $i = (1, 0)$ ,  $j = (0, 1)$ , trong  $\mathbf{R}^2$  là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

**Giải.** Điều kiện (5.3.1) viết  $c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0)$ .

Nó tương đương với  $(c_1, c_2) = (0, 0)$ .

Vậy điều kiện (5.3.1) chỉ xảy ra khi  $c_1 = 0, c_2 = 0$ . Do đó họ  $\{i, j\}$  là độc lập tuyến tính trong  $\mathbf{R}^2$ .

*Thí dụ 5.3.2.* Cho  $x = (1, 2), y = (1, 1)$  trong  $\mathbf{R}^2$ . Hỏi họ  $\{x, y\}$  có độc lập tuyến tính không ?

*Giải :* Điều kiện (5.3.1) viết

$$c_1(1, 2) + c_2(1, 1) = (0, 0).$$

Nó tương đương với

$$(c_1 + c_2, 2c_1 + c_2) = (0, 0)$$

Vậy điều kiện (5.3.1) chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

Hệ này có định thức bằng  $-1 \neq 0$  nên chỉ có nghiệm tầm thường  $c_1 = c_2 = 0$ . Vậy  $c_1x + c_2y = \theta$  chỉ xảy ra khi  $c_1 = c_2 = 0$ . Do đó họ  $\{x, y\}$  độc lập tuyến tính trong  $\mathbf{R}^2$ .

*Thí dụ 5.3.3.* Cho họ  $S = \{(3, -6), (-2, 4)\}$ . Hỏi nó có độc lập tuyến tính trong  $\mathbf{R}^2$  không ?

*Giải :* Điều kiện (5.3.1) viết

$$c_1(3, -6) + c_2(-2, 4) = (0, 0)$$

Phương trình này tương đương với

$$(3c_1 - 2c_2, -6c_1 + 4c_2) = (0, 0).$$

Nó tương đương với

$$\begin{cases} 3c_1 - 2c_2 = 0 \\ -6c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm không tầm thường chẳng hạn  $c_1 = 2, c_2 = 3$ .

Do đó họ  $S$  đã cho phụ thuộc tuyến tính.

*Thí dụ 5.3.4.* Trong không gian  $\mathbf{R}_3$  ở thí dụ 5.1.1 thì :

Hai vectơ đồng phương là phụ thuộc tuyến tính.

Hai vectơ không đồng phương là độc lập tuyến tính.

Ba vectơ đồng phẳng là phụ thuộc tuyến tính.

Ba vectơ không đồng phẳng là độc lập tuyến tính.

Bốn vectơ bất kì là phụ thuộc tuyến tính.

*Chú ý 5.3.1.* Mọi họ vectơ  $S$  chứa vectơ không là phụ thuộc tuyến tính.

*Chú ý 5.3.2.* Giả sử họ  $S$  phụ thuộc tuyến tính và giả sử điều kiện (5.3.1) được thoả mãn với  $c_k \neq 0$ , nghĩa là

$$c_1x_1 + \dots + c_kx_k + \dots + c_nx_n = \theta.$$

Ta suy ra

$$x_k = -(c_1x_1 + \dots + c_{k-1}x_{k-1} + c_{k+1}x_{k+1} + \dots + c_nx_n)/c_k.$$

Vậy nếu họ  $S$  phụ thuộc tuyến tính thì trong họ  $S$  có ít nhất một vectơ biểu diễn được thành một tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại (giả sử  $S$  có số vectơ lớn hơn hoặc bằng 2).

BÀI TẬP : 5.13 – 5.18.

## 5.4. KHÔNG GIAN HỮU HẠN CHIỀU VÀ CƠ SỞ CỦA NÓ

### 5.4.1. Khái niệm về không gian $n$ chiều

*Định nghĩa 5.4.1.* Không gian vectơ  $V$  được gọi là không gian  $n$  chiều ( $1 \leq n$  nguyên) nếu trong  $V$  tồn tại  $n$  vectơ độc lập tuyến tính và không tồn tại quá  $n$  vectơ độc lập tuyến tính.

Khi đó ta nói số chiều của không gian  $V$  là  $n$  và kí hiệu nó là  $\dim(V)$ .

Tập  $\{\theta\}$  chỉ gồm một phần tử  $\theta$  của một không gian vectơ bất kì theo thí dụ 5.2.1 cũng là một không gian vectơ, ta nói có số chiều bằng 0 :  $\dim(\{\theta\}) = 0$ .

Các không gian  $n$  chiều,  $n \geq 0$ , gọi là không gian hữu hạn chiều.

Nếu trong  $V$  có thể tìm được một số bất kì các vectơ độc lập tuyến tính thì ta nói  $V$  là không gian vô hạn chiều.

Trong tài liệu này ta chỉ xét các không gian hữu hạn chiều.

*Thí dụ 5.4.1.* Xét không gian  $R_3$  các vectơ hình học gốc tại điểm xác định  $O$  nói ở thí dụ 5.1.1.

Qua thí dụ 5.3.4 (hai điểm cuối) ta thấy 3 vectơ không đồng phẳng thì độc lập tuyến tính và 4 vectơ bất kì thì phụ thuộc tuyến tính.

Vậy  $R_3$  là không gian 3 chiều,  $\dim(R_3) = 3$ .

### 5.4.2. Cơ sở của không gian $n$ chiều

Trong không gian  $n$  chiều, số vectơ độc lập tuyến tính có thể có không vượt quá  $n$ . Từ đó ta đi đến định nghĩa sau :

**Định nghĩa 5.4.2.** Trong không gian  $n$  chiều  $V$  mọi họ gồm  $n$  vectơ độc lập tuyến tính gọi là một cơ sở của  $V$ .

*Thí dụ 5.4.2.* Trong không gian  $R_3$  ở thí dụ 5.4.1 mọi họ gồm ba vectơ không đồng phẳng là một cơ sở của nó.

### 5.4.3. Những tính chất về cơ sở và số chiều

1. Trước hết ta xét một bổ đề.

**Bổ đề 5.4.1.** Giả sử  $V$  là một không gian vectơ,  $T = \{y_1, \dots, y_n\}$  là một họ gồm  $n$  vectơ độc lập tuyến tính của  $V$ ,  $S = \{x_1, \dots, x_m\}$  là một họ gồm  $m$  vectơ của  $V$  và sinh ra  $V$ . Thế thì  $n \leq m$ .

*Chứng minh :* Vì  $S$  sinh ra  $V$  nên

$$y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{m1}x_m$$

$$y_2 = a_{12}x_1 + \dots + a_{m2}x_m$$

.....

$$y_n = a_{1n}x_1 + \dots + a_{mn}x_m$$

Xét hệ phương trình tuyến tính mà ẩn là  $c_i$  :

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + \dots + a_{2n}c_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}c_1 + \dots + a_{mn}c_n = 0 \end{cases}$$



Nếu  $n > m$  thì hệ thuần nhất này có số phương trình ít hơn số ẩn, do đó nó có nghiệm không tầm thường, nghĩa là tồn tại  $n$  số thực  $c_i$  không đồng thời bằng 0 thoả mãn  $m$  đẳng thức trên. Nhân đẳng thức thứ nhất với  $x_1$ , đẳng thức thứ hai với  $x_2, \dots$ , đẳng thức thứ  $m$  với  $x_m$  rồi cộng lại ta được

$$(a_{11}c_1 + \dots + a_{1m}c_m)x_1 + \dots + (a_{m1}c_1 + \dots + a_{mn}c_n)x_m = 0$$

hay là

$$c_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{m1}x_m) + \dots + c_n(a_{1n}x_1 + \dots + a_{mn}x_m) = 0,$$

nghĩa là có

$$c_1y_1 + \dots + c_ny_n = 0,$$

với các  $c_i$  không đồng thời bằng không. Điều này trái giả thiết nói rằng họ  $T$  độc lập tuyến tính. Vậy  $n \leq m$ .

2. Bây giờ ta phát biểu và chứng minh một số tính chất quan trọng về cơ sở và số chiều của không gian vectơ.

**a) Định lý 5.4.1.** Giả sử  $V$  là một không gian vectơ,  $S = \{f_1, \dots, f_k\}$  là một họ gồm  $k$  vectơ của  $V$ .

Nếu  $S$  sinh ra  $V$  và độc lập tuyến tính thì  $V$  là không gian  $k$  chiều và  $S$  là một cơ sở của  $V$ .

**Chứng minh :** Giả sử  $T = \{e_1, \dots, e_p\}$  là một họ gồm  $p$  vectơ độc lập tuyến tính của  $V$ . Theo bổ đề 5.4.1 thì  $p \leq k$ . Do đó  $k$  là số tối đa các vectơ độc lập tuyến tính của  $V$ . Vậy theo định nghĩa 5.4.1,  $k$  là số chiều của  $V$ . Sau đó thì  $S$  có  $k$  vectơ độc lập tuyến tính nên theo định nghĩa 5.4.2 thì  $S$  là một cơ sở của  $V$ .

**Thí dụ 5.4.3.** Xét các vectơ  $i = (1, 0)$  và  $j = (0, 1)$  của  $\mathbf{R}^2$ .

Họ  $\{i, j\}$  sinh ra  $\mathbf{R}^2$  theo thí dụ 5.2.8. Nó độc lập tuyến tính theo thí dụ 5.3.1.

Vậy  $\mathbf{R}^2$  có số chiều là 2 và họ  $\{i, j\}$  là một cơ sở.

**Thí dụ 5.4.4.** Xét các vectơ  $x = (1, 2)$  và  $y = (1, 1)$  của  $\mathbf{R}^2$ .

Họ  $\{x, y\}$  sinh ra  $\mathbf{R}^2$  theo thí dụ 5.2.10. Nó độc lập tuyến tính theo thí dụ 5.3.2.

Vậy  $\mathbf{R}^2$  có số chiều là 2 và  $\{x, y\}$  là một cơ sở.

*Thí dụ 5.4.5.* Trong  $\mathbf{R}^n$  xét họ vectơ

$$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$i$

Họ  $B$  sinh ra  $\mathbf{R}^n$  vì mọi  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  có thể viết

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Họ  $B$  độc lập tuyến tính vì điều kiện (5.3.1) viết

$$c_1 e_1 + \dots + c_n e_n = (0, 0, \dots, 0)$$

tức là

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$$

Vậy  $\dim(\mathbf{R}^n) = n$  và  $B$  là một cơ sở.

*b) Định nghĩa 5.4.3.* Cơ sở trong thí dụ 5.4.5 gọi là cơ sở chính tắc của  $\mathbf{R}^n$ .

*Thí dụ 5.4.6.* Trong không gian  $P_n$  các đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng  $n$ , xét họ

$$B = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$$

Họ này sinh ra  $P_n$  vì mọi đa thức  $p$  có bậc không lớn hơn  $n$  đều viết ở dạng

$$p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n, a_i \in \mathbf{R}$$

Họ  $B$  này độc lập tuyến tính vì điều kiện

$$c_0 \cdot 1 + c_1 t + \dots + c_n t^n = 0, \forall t$$

chứng tỏ phương trình này có vô số nghiệm, điều đó chỉ có thể xảy ra khi  $c_0 = 0, c_1 = 0, \dots, c_n = 0$  (vì một phương trình bậc nhỏ hơn hay bằng  $n$  với ít nhất một hệ số khác 0 có nhiều nhất là  $n$  nghiệm) (xem thêm 2.6.5 và 2.6.6).

Vậy  $\dim(P_n) = n + 1$  và  $B$  là một cơ sở của  $P_n$ .

Cơ sở này gọi là cơ sở chính tắc của  $P_n$ .

Cơ sở của một không gian vectơ còn có đặc điểm quan trọng sau :

$V$  là một không gian vectơ

$S = \{f_1, \dots, f_n\}$  là một họ gồm  $n$  vectơ của  $V$ .

c) Định lí 5.4.2.

Nếu  $V$  là không gian  $n$  chiều và  $S$  là một cơ sở thì mọi  $x \in V$  có biểu diễn duy nhất :

$$x = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n \quad (5.4.1)$$

d) Định lí 5.4.3.

Nếu mọi  $x \in V$  có biểu diễn duy nhất (5.4.1) thì  $V$  là không gian  $n$  chiều và  $S$  là một cơ sở.

Chứng minh định lí 5.4.2 : Giả sử  $V$  là không gian  $n$  chiều và  $S$  là một cơ sở của  $V$ . Lúc đó họ  $S$  độc lập tuyến tính và mọi họ gồm  $n + 1$  vectơ của  $V$  là phụ thuộc tuyến tính. Xét  $x$  bất kì của  $V$ . Họ  $\{x, f_1, \dots, f_n\}$  gồm  $n + 1$  vectơ nên phụ thuộc tuyến tính. Do đó tồn tại các số  $c_i$  không đồng thời bằng 0 để

$$c_0 x + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = \theta$$

$c_0 \neq 0$  vì nếu  $c_0 = 0$ , thì tồn tại các số  $c_i$  không đồng thời bằng 0 để

$$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = \theta$$

điều này trái với tính chất  $S$  là độc lập tuyến tính. Do đó

$$x = \left( -\frac{c_1}{c_0} \right) f_1 + \dots + \left( -\frac{c_n}{c_0} \right) f_n$$

Vậy mọi  $x \in V$  có biểu diễn (5.4.1). Ta chứng minh biểu diễn đó là duy nhất. Giả sử có hai biểu diễn cho  $x$  :

$$x = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$$

$$x = c'_1 f_1 + \dots + c'_n f_n$$

thì có

$$(c_1 - c'_1) f_1 + \dots + (c_n - c'_n) f_n = \theta.$$

Vì họ  $S$  độc lập tuyến tính nên đẳng thức này chỉ xảy ra khi

$$c_1 - c'_1 = 0, \dots, c_n - c'_n = 0$$

tức là 
$$c_1 = c'_1, \dots, c_n = c'_n.$$

Vậy biểu diễn (5.4.1) của  $x$  là duy nhất.

*Chứng minh định lí 5.4.3.*

Bây giờ giả sử mọi  $x \in V$  có biểu diễn duy nhất (5.4.1). Do đó  $S$  sinh ra  $V$ . Ta chứng minh thêm rằng  $S$  độc lập tuyến tính. Xét biểu diễn (5.4.1) của phần tử không của  $V$  :

$$0f_1 + \dots + 0f_n = \theta$$

Biểu diễn này là duy nhất. Do đó điều kiện (5.3.1) viết

$$c_1f_1 + \dots + c_n \cdot f_n = \theta$$

chỉ xảy ra khi  $c_1 = 0, \dots, c_n = 0$ . Vậy họ  $S$  độc lập tuyến tính. Tóm lại  $S$  sinh ra  $V$  và  $S$  độc lập tuyến tính, nên theo định lí 5.4.1,  $V$  là không gian  $n$  chiều và  $S$  là một cơ sở của  $V$ .

d)  $V$  là một không gian  $n$  chiều

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V \quad (5.4.2)$$

Ta hãy tìm điều kiện để  $S$  độc lập tuyến tính tức là điều kiện để  $S$  là một cơ sở của  $V$ .

Giả sử  $B = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  là một cơ sở nào đó của  $V$  và  $u_j, j = 1, 2, \dots, n$  có phân tích :

$$u_j = u_{1j}v_1 + u_{2j}v_2 + \dots + u_{nj}v_n \quad (5.4.3)$$

Điều kiện để họ  $S$  độc lập tuyến tính là

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n = 0 \quad (5.4.4)$$

chỉ xảy ra khi  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . Vì  $u_j$  có phân tích (5.4.3) nên điều kiện (5.4.4) có nghĩa là hệ

$$Ac = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (5.4.5)$$

chỉ có nghiệm tầm thường. Vậy có

**Định lí 5.4.4.** Điều kiện cần và đủ để  $S$  độc lập tuyến tính là  $\det(A) \neq 0$ .

Ta suy ra hệ quả sau :

**Định lí 5.4.5.**  $V$  là không gian  $n$  chiều. Muốn cho họ  $S$  ở (5.4.2) là cơ sở của  $V$  điều kiện cần và đủ là  $\det(A) \neq 0$ ,  $A$  xác định bởi (5.4.5).

**Thí dụ 5.4.7.** Xét ba vectơ thuộc  $\mathbf{R}^3$

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (2, 1, 4), u_3 = (3, 2, 1).$$

Ta lập ma trận  $A$  :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta có  $\det(A) = 14 \neq 0$ . Vậy họ  $\{u_1, u_2, u_3\}$  độc lập tuyến tính.

Ngoài ra ta xét thêm một tính chất nữa :

Giả sử  $V$  là một không gian  $n$  chiều. Xét

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset V$$

là một họ vectơ độc lập tuyến tính.

Nếu  $r = n$  thì theo định nghĩa 5.4.2,  $S$  là một cơ sở của  $V$ .

Nếu  $r < n$  thì ta có thể mở rộng  $S$  thành một cơ sở cho  $V$ , cụ thể là ta có định lí sau :

**Định lí 5.4.6.**  $V$  là một không gian  $n$  chiều ; nếu  $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$  là một họ độc lập tuyến tính và  $r < n$  thì có thể tìm được  $n - r$  vectơ  $v_{r+1}, \dots, v_n$  sao cho họ  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$  là một cơ sở của  $V$ .

Kết quả này có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. Sau đây là một thí dụ minh hoạ.

*Thí dụ 5.4.8.* Trong không gian  $R_3$  ở thí dụ 5.4.1, 5.4.2, có số chiều  $n = 3$ , hai vectơ không đồng phương là độc lập tuyến tính. Nếu ta thêm vào hai vectơ đó vectơ thứ ba không đồng phẳng với chúng thì được một cơ sở của  $R_3$ .

#### 5.4.4. Lại nói về hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Xét hệ phương trình tuyến tính gồm  $m$  phương trình  $n$  ẩn :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (5.4.6)$$

Ma trận hệ số của hệ là

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [A_1, A_2, \dots, A_n]$$

(Kí hiệu tượng trưng  $A_j$  chỉ vectơ cột thứ  $j$  của ma trận  $A$ ).

Ma trận bổ sung của hệ là

$$\bar{A} = [A_1, A_2, \dots, A_n, b]$$

với

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Hệ (5.4.6) có thể viết ở dạng vectơ

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = b$$

Vậy :

Nếu hệ có nghiệm thì  $b \in \text{span} \{A_1, \dots, A_n\}$

Ngược lại, nếu  $b \in \text{span} \{A_1, \dots, A_n\}$  thì hệ có nghiệm.

Do đó có :

**Định lí 5.4.7.** Điều kiện cần và đủ để hệ (5.4.6) có nghiệm là

$$b \in \text{span} \{A_1, \dots, A_n\}$$

BÀI TẬP : 5.19 – 5.23.

## 5.5. SỐ CHIỀU VÀ CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT HỌ VECTƠ

### 5.5.1 Mở đầu

Giả sử  $V$  là một không gian vectơ và

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \subset V$$

Theo định lí 5.2.2 thì  $S$  sinh ra một không gian con  $W$  của  $V$ . Bây giờ ta tìm số chiều và cơ sở của  $W$ .

### 5.5.2. Hạng của một họ vectơ

*Định nghĩa 5.5.1.* Xét họ  $S = \{u_1, \dots, u_p\} \subset V$ . Số tối đa các vectơ độc lập tuyến tính có thể rút ra từ  $S$  gọi là hạng của họ  $S$  và kí hiệu là  $r(S)$ .

### 5.5.3. Cách tính hạng của một họ vectơ bằng biến đổi sơ cấp

Ta trình bày phương pháp này thông qua một thí dụ.

*Thí dụ 5.5.1.* Trong  $\mathbb{R}^3$  xét họ

$$S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset \mathbb{R}^3$$

với

$$u_1 = (1, 3, 0), \quad u_2 = (0, 2, 4)$$

$$u_3 = (1, 5, 4), \quad u_4 = (1, 1, -4).$$

Ta lập ma trận  $A$  có 4 hàng là 4 vectơ trên :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

rồi dùng các biến đổi sơ cấp về hàng để đưa  $A$  về dạng bậc thang (xem 3.5.2) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

*Nhận xét 1.* Mỗi phép biến đổi sơ cấp về hàng không thay đổi span của các vectơ hàng của ma trận  $A$ .

*Chứng minh :* Giả sử phép biến đổi sơ cấp biến ma trận  $A$  có các hàng là  $u_1, u_2, u_3, u_4$  thành ma trận  $A'$  có các hàng là  $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4$ . Nếu phép biến đổi sơ cấp là phép nhân một hàng với một số khác không hay phép cộng một hàng với bội của một hàng khác thì  $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4$  là các tổ hợp tuyến tính của  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . Mặt khác mỗi phép biến đổi sơ cấp đều có phép biến đổi ngược cũng là biến đổi sơ cấp biến  $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4$  trở lại thành  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , nghĩa là  $u_1, u_2, u_3, u_4$  cũng là các tổ hợp tuyến tính của  $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4$ . Vậy

$$\text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \text{span}\{u'_1, u'_2, u'_3, u'_4\}$$

*Nhận xét 2.* Trong dạng bậc thang  $U$  các vectơ hàng khác không là độc lập tuyến tính.

*Chứng minh.* Xét thí dụ 5.5.1. Ta thấy trong ma trận  $U$  có hai vectơ hàng khác không là

$$u_1 = (1, 3, 0) \text{ và } u_2 = (0, 1, 2)$$

Để chứng minh chúng độc lập tuyến tính ta xét điều kiện

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 = 0$$



Điều kiện này tương đương với

$$1c_1 + 0c_2 = 0$$

$$3c_1 + 1c_2 = 0$$

$$0c_1 + 2c_2 = 0$$

tức là  $c_1 = 0, c_2 = 0$ . Vậy  $u_1$  và  $u_2$  độc lập tuyến tính. Trường hợp tổng quát, cách chứng minh là tương tự.

Vậy có

*Chú ý 5.5.1. Hạng của họ vectơ  $S \subset V = \mathbf{R}^n$  bằng số vectơ hàng khác không của ma trận bậc thang  $U$  suy từ ma trận  $A$  bằng các biến đổi sơ cấp về hàng.*

Trong thí dụ 5.5.1 họ  $S$  có hạng bằng 2.

Từ các chú ý 3.5.1, 3.5.2 và 5.5.1 ta suy ra

*Chú ý 5.5.2. Hạng của họ vectơ  $S \subset V = \mathbf{R}^n$  bằng hạng của ma trận  $A$  thành lập từ tọa độ của các vectơ của họ  $S$  xem là các hàng của  $A$  hoặc xem là các cột của  $A$ .*

#### 5.5.4. Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi một họ vectơ

1. Vì số tối đa các vectơ độc lập tuyến tính của họ  $S$  bằng hạng  $r$  của nó nên ta có thể suy ra

**Định lí 5.5.1.**  *$V$  là một không gian vectơ*

$$S = \{u_1, \dots, u_p\} \subset V$$

*Thế thì  $W = \text{span}(S)$  là một không gian con của  $V$  có số chiều bằng hạng  $r$  của  $S$  và mọi họ  $r$  vectơ độc lập tuyến tính rút từ  $S$  là một cơ sở của  $W$ .*

*Chứng minh :* Giả sử  $S = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_r\}$  gồm  $r$  vectơ độc lập tuyến tính rút từ  $S$  (vì bao giờ ta cũng có thể đánh số lại các vectơ của  $S$  để có  $r$  vectơ đầu là độc lập tuyến tính) lúc đó

$$\text{span}(S') = \text{span}(S) = W.$$

Vì  $S'$  độc lập tuyến tính và sinh ra  $W$  nên theo định lý 5.4.2,  $W$  có số chiều là  $r$ . Sau đó mọi họ gồm  $r$  vectơ độc lập tuyến tính rút từ  $S$  là một cơ sở của  $W$  theo định nghĩa 5.4.2.

*Thí dụ 5.5.2.* Xét họ  $\{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset \mathbb{R}^3$  ở thí dụ 5.5.1. Theo kết quả đã thu được ở đó thì họ này sinh ra một không gian con của  $\mathbb{R}^3$  có số chiều bằng 2 và  $\{u_1, u_2\}$  là một cơ sở.

2. Bây giờ giả sử  $V$  là một không gian  $n$  chiều và  $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ . Nếu  $S$  độc lập tuyến tính thì  $S$  là một cơ sở của  $V$  theo định nghĩa 5.4.2. của cơ sở. Ta có thêm : Nếu  $S$  sinh ra  $V$  thì  $S$  cũng là một cơ sở của  $V$ , nghĩa là ta có

**Định lý 5.5.2.**  $V$  là không gian  $n$  chiều và

$S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ . Nếu  $S$  sinh ra  $V$  thì  $S$  là một cơ sở của  $V$ .

*Chứng minh.* Ta có  $\text{span}(S) = V$ . Giả sử hạng của  $S$  là  $r$ . Theo định lý 5.5.1 thì  $r$  là số chiều của  $\text{span}(S)$  tức là của  $V$ . Vậy  $r = n$ . Do đó hệ  $S$  độc lập tuyến tính và vì vậy nó là cơ sở của  $V$ .

BÀI TẬP : 5.24 – 5.30.

## 5.6. TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ KHÔNG GIAN CÓ TÍCH VÔ HƯỚNG

### 5.6.1. Mở đầu

Từ trường phổ thông ta đã học khái niệm độ dài của một vectơ hình học và sự vuông góc của hai vectơ hình học. Đó là những khái niệm rất quan trọng. Nay ta tìm cách suy rộng các khái niệm đó cho những vectơ của một không gian vectơ.

Ta bắt đầu từ khái niệm tích vô hướng.

### 5.6.2. Nhắc lại tích vô hướng của hai vectơ hình học (xem 4.6).

Tích vô hướng của hai vectơ hình học  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số thực, kí hiệu là  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ , xác định bởi

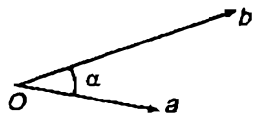
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

trong đó

$|\vec{a}|$  là độ dài của  $\vec{a}$

$|\vec{b}|$  là độ dài của  $\vec{b}$

$\alpha$  là góc giữa  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  (hình 47)



Hình 47

Dựa vào định nghĩa đó người ta đã chứng minh được các tính chất sau của tích vô hướng

- (1)  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  là một số xác định đối với mọi vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$
- (2)  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$
- (3)  $\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$
- (4)  $\langle k\vec{a}, \vec{b} \rangle = k \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$
- (5)  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$  và  $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ .

Từ định nghĩa của tích vô hướng của 2 vectơ ta cũng suy ra

$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

Dựa vào các tính chất đó người ta chứng minh được các biểu thức tọa độ của tích vô hướng :

Trong  $\mathbf{R}^2$ , nếu  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  thì

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

và trong  $\mathbf{R}^3$ :

Nếu  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  thì

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

### 5.6.3. Tích vô hướng trong không gian vectơ và không gian có tích vô hướng

Nó là suy rộng của khái niệm tích vô hướng của hai vectơ hình học, căn cứ vào những tính chất (1) – (5) ở 5.6.2.

**Định nghĩa 5.6.1.**  $V$  là một không gian vectơ,  $u$  và  $v$  là hai vectơ của  $V$ . Tích vô hướng của  $u$  và  $v$  là một số thực, kí hiệu là  $\langle u, v \rangle$ , thoả mãn các tính chất sau gọi là các tiên đề của tích vô hướng :

TVH1  $\langle u, v \rangle$  xác định đối với mọi cặp  $u, v \in V$

TVH2  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

TVH3  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

TVH4  $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$

TVH5  $\langle u, u \rangle \geq 0$  và  $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta$

Không gian vectơ  $V$  có trang bị một tích vô hướng gọi là không gian có tích vô hướng. Không gian  $n$  chiều có tích vô hướng gọi là không gian Euclid.

*Thí dụ 5.6.1.* Trong  $\mathbf{R}^n$  với  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

thì biểu thức tương tự biểu thức tọa độ của tích vô hướng trong  $\mathbf{R}^2$  và  $\mathbf{R}^3$  sau đây

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

thoả mãn tất cả các tính chất TVH1 – TVH5, cho nên nó là một tích vô hướng của  $\mathbf{R}^n$  :

$$\langle u, v \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n. \tag{5.6.1}$$

**Định nghĩa 5.6.2.** Tích vô hướng (5.6.1) gọi là tích vô hướng Euclid trong  $\mathbf{R}^n$ .

*Thí dụ 5.6.2.* Trong không gian vectơ các hàm số liên tục trên  $[a, b]$ , tức là  $C[a, b]$  (xem thí dụ 4.1.3), thì tích vô hướng của hai hàm  $f$  và  $g$  có thể định nghĩa bởi

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Các tiên đề TVH1–TVH5 đều thoả mãn.

**Chú ý 5.6.1.**

Từ các tiên đề TVH1 – TVH5 ta suy ra thêm các tính chất sau :

$$\begin{aligned} \langle \theta, v \rangle &= \langle v, \theta \rangle = 0 \\ \langle u, v + w \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \\ \langle u, kv \rangle &= k \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

**5.6.4. Độ dài của vectơ**

Ta đã biết :

Trong  $\mathbf{R}^3$ ,  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  thì độ dài của  $\vec{a}$  là

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle^{1/2}$$

Suy rộng ý đó ta có khái niệm độ dài của vectơ trong không gian vectơ có tích vô hướng.

**1. Định nghĩa 5.6.3.**  $V$  là một không gian có tích vô hướng và  $u \in V$  thì số (không âm)  $\|u\|$  xác định bởi

$$\|u\| := \langle u, u \rangle^{1/2}$$

gọi là độ dài của vectơ  $u$ .

*Chú ý 5.6.2.* Độ dài của  $u$  cũng gọi là chuẩn của  $u$ .

*Thí dụ 5.6.3.* Trong  $\mathbf{R}^n$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  ta có

$$\|u\| = (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{1/2}$$

gọi là độ dài Euclid của  $u \in \mathbf{R}^n$ .

**2. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz (C-S)**

Nếu  $u$  và  $v$  là hai vectơ trong một không gian có tích vô hướng thì có bất đẳng thức Cauchy - Schwarz :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \tag{C.S}$$

*Chứng minh.* Trường hợp có một vectơ  $= \theta$ , giả sử  $u = \theta$  thì

$$\langle u, v \rangle = 0, \|u\| = 0$$

nên bất đẳng thức trên thoả mãn.

Trường hợp  $u \neq \theta$  và  $v \neq \theta$  thì theo tiên đề TVHS ta có

$$\langle tu + v, tu + v \rangle \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Do đó

$$\langle u, u \rangle t^2 + 2\langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}$$

hay 
$$\|u\|^2 t^2 + 2\langle u, v \rangle t + \|v\|^2 \geq 0, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Vế trái là một tam thức bậc hai đối với  $t$  có biệt số là

$$\langle u, v \rangle^2 - \|u\|^2 \|v\|^2$$

Vậy phải có

$$\langle u, v \rangle^2 - \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq 0$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (C-S)

*Thí dụ 5.6.4.* Áp dụng bất đẳng thức (C-S) vào

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  và  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  trong  $\mathbf{R}^n$  với tích vô hướng Euclid ta được

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)$$

**3. Tính chất của độ dài.** Độ dài của vectơ có các tính chất sau :

$$L_1 \quad \|u\| \geq 0$$

$$L_2 \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta$$

$$L_3 \quad \|ku\| = |k| \|u\|$$

$$L_4 \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Các tính chất  $L_1, L_2, L_3$  dễ thấy từ các tiên đề của tích vô hướng và định nghĩa của độ dài. Ta chứng minh tính chất  $L_4$ .

Theo định nghĩa

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &\leq \langle u, u \rangle + 2|\langle u, v \rangle| + \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức C - S thì

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra  $L_4$ .

### 5.6.5. Khái niệm khoảng cách

Nếu ta xem mỗi phần tử của không gian vectơ là một điểm (xem chú ý 5.1.4) thì ta có thể đưa vào khái niệm khoảng cách (xem hình 48) giữa hai điểm  $u, v$  :

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

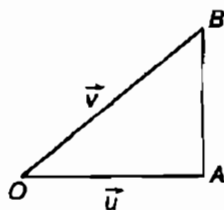
Khoảng cách  $d(u, v)$  có các tính chất

$$D_1 \quad d(u, v) \geq 0$$

$$D_2 \quad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

$$D_3 \quad d(u, v) = d(v, u)$$

$$D_4 \quad d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$$



Hình 48

Bất đẳng thức  $D_4$  thường gọi là bất đẳng thức tam giác.

Các tính chất  $D_1, D_2, D_3$  suy từ  $L_1, L_2, L_3$ .

Để có  $D_4$  ta viết

$$u - v = u - w + w - v$$

Nhờ  $L_4$  ta suy ra

$$\|u - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\|.$$

Đó chính là  $D_4$ .

### 5.6.6. Sự vuông góc của hai vectơ

Trong  $R_3$  ta có  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ .

Do đó khi  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$  mà  $|\vec{a}| \neq 0$ ,  $|\vec{b}| \neq 0$  thì  $\cos \alpha = 0$  nghĩa là  $\alpha$  vuông,  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . Trong trường hợp tổng quát ta có khái niệm vuông góc như sau :

1. **Định nghĩa 5.6.4.** Trong một không gian có tích vô hướng hai vectơ  $u$  và  $v$  gọi là trực giao nếu  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Hơn nữa, nếu  $u$  trực giao với mọi vectơ của một họ  $W$  nào đó thì nói  $u$  trực giao với  $W$ .

Chú ý rằng sự trực giao của hai vectơ định nghĩa như vậy sẽ phụ thuộc định nghĩa của tích vô hướng. Hai vectơ cho trước có thể trực giao theo tích vô hướng này mà không trực giao theo tích vô hướng khác.

2. **Thí dụ 5.6.5.** Trong  $P_2$  xét tích vô hướng

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

Xét

$$p = x, q = x^2$$

thì có 
$$\|p\| = \langle p, p \rangle^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 x \cdot x dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|q\| = \langle q, q \rangle^{1/2} = \left[ \int_{-1}^1 x^2 \cdot x^2 dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 x x^2 dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0.$$

Vậy vectơ  $p = x$  và  $q = x^2$  của  $P_2$  là hai vectơ trực giao theo tích vô hướng định nghĩa ở trên.



### 5.6.7. Họ vectơ trực giao

1. **Định nghĩa 5.6.5.** Một họ vectơ trong không gian có tích vô hướng gọi là một họ trực giao nếu bất kì hai vectơ khác nhau nào của họ cũng trực giao.

Một họ vectơ trực giao trong đó mọi vectơ đều có chuẩn là 1 gọi là một họ trực chuẩn.

Thí dụ 5.6.6. Xét các vectơ trong  $\mathbf{R}^3$

$$v_1(0, 1, 0); v_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), v_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Họ  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  trong  $\mathbf{R}^3$  với tích vô hướng Euclid là một họ trực chuẩn vì

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0, \langle v_2, v_3 \rangle = 0, \langle v_3, v_1 \rangle = 0$$

$$\|v_1\| = 1, \|v_2\| = 1, \|v_3\| = 1$$

2. **Chuẩn hoá một vectơ.** Nếu  $v$  là một vectơ khác không trong không gian có tích vô hướng thì

$$\frac{1}{\|v\|} v \text{ có chuẩn là } 1.$$

Thật vậy

$$\left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1.$$

### 5.6.8. Quá trình trực giao hoá của Gram-Smidt

**Định lý 5.6.1.**  $V$  là một không gian có tích vô hướng,  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  là một họ vectơ độc lập tuyến tính của  $V$ . Ta có thể thay  $S$  bằng họ trực chuẩn

$$S' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

sao cho khi kí hiệu  $S_k = \{u_1, \dots, u_k\}$ ,  $S'_k = \{v_1, \dots, v_k\}$  thì

$$\text{span } S_k = \text{span } S'_k, k = 1, 2, \dots, m$$

*Chứng minh*

*Bước 1.* Trước hết ta đặt  $v_1 = u_1 / \|u_1\|$ .

Như vậy  $\|v_1\| = 1$  và  $\text{span } S_1 = \text{span } S'_1$ .

*Bước 2.* Tìm  $v_2$  sao cho họ  $\{v_1, v_2\}$  trực chuẩn. Muốn thế ta đặt

$$\bar{v}_2 = u_2 + tv_1$$

và chọn  $t$  sao cho

$$\langle \bar{v}_2, v_1 \rangle = 0, \text{ tức là } \langle u_2 + tv_1, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle u_2, v_1 \rangle + t \langle v_1, v_1 \rangle = 0.$$

Vậy 
$$t = -\langle u_2, v_1 \rangle / \|v_1\|^2 = -\langle u_2, v_1 \rangle.$$

Do đó 
$$\bar{v}_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1.$$

Sau đó đặt

$$v_2 = \frac{1}{\|\bar{v}_2\|} \bar{v}_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}.$$

Đương nhiên  $u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 \neq \theta$  vì nếu  $u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \theta$  thì

$$u_2 = \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|u_1\|} u_1$$

nghĩa là  $u_2$  và  $u_1$  không độc lập tuyến tính, điều này trái với giả thiết. Vậy  $\{v_1, v_2\} = S'_2$  trực chuẩn và  $\text{span } S'_2 = \text{span } S_2$ .

*Bước 3.* Giả sử đã xây dựng được họ trực chuẩn

$$S'_{k-1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}.$$

mà  $\text{span } S_l = \text{span } S'_l$   $1 \leq l \leq k-1$ .

Ta xây dựng tiếp  $v_k$  để cho họ

$$S'_k = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$$

là họ trực chuẩn và  $\text{span } S'_k = \text{span } S_k$ . Muốn thế ta đặt

$$\bar{v}_k = u_k + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{k-1} v_{k-1}$$

và chọn các  $t_j, j = 1, \dots, k - 1$ , sao cho

$$\langle \bar{v}_k, v_j \rangle = 0, j = 1, 2, \dots, k - 1$$

Điều kiện này viết

$$\begin{aligned} \langle u_k, v_j \rangle + \langle t_j v_j, v_j \rangle &= 0 \\ j &= 1, 2, \dots, k - 1 \end{aligned}$$

Ta suy ra

$$t_j = -\langle u_k, v_j \rangle, j = 1, 2, \dots, k - 1$$

Do đó  $\bar{v}_k$  được xác định

$$\bar{v}_k = u_k - \langle u_k, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u_k, v_{k-1} \rangle v_{k-1}.$$

Sau đó, cũng như ở bước 2,  $\bar{v}_k$  không thể bằng  $\theta$ . Đặt

$$v_k = \frac{1}{\|\bar{v}_k\|} \bar{v}_k = \frac{u_k - \langle u_k, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u_k, v_{k-1} \rangle v_{k-1}}{\|u_k - \langle u_k, v_1 \rangle v_1 - \dots - \langle u_k, v_{k-1} \rangle v_{k-1}\|}.$$

Tiếp tục quá trình đó cho tới khi  $k = m$  ta được họ

$$S' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

gồm  $m$  vectơ trực chuẩn,  $\text{span } S_k = \text{span } S'_k, k = 1, 2, \dots, m$ .

Ta nói  $S'$  có được từ  $S$  bằng trực chuẩn hoá Gram-Smidt.

**Thí dụ 5.6.7.** Cho trong không gian Euclid  $\mathbb{R}^3$

$$S = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1).$$

Hãy trực chuẩn hoá Gram-Smidt họ vectơ  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .

*Lời giải :*

**Bước 1 :** Đặt

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Bước 2

$$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1}{\|u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1\|}$$

$$\begin{aligned} u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 &= (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Vậy 
$$v_2 = \frac{3}{\sqrt{6}} \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left( -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Bước 3

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2}{\|u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2\|} = \\ &= u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2 = \\ &= (0, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{6}} \left( -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ &= \left( 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Vậy 
$$v_3 = \sqrt{2} \left( 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Tóm lại

$$v_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$v_2 = \left( -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$v_3 = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

tạo nên họ  $S'$  trực chuẩn trong không gian  $\mathbf{R}^3$  với tích vô hướng Euclid và  $\text{span } S'_k = \text{span } S_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

### 5.6.9. Tính độc lập tuyến tính của một họ vectơ trực giao

**Định lí 5.6.2.** Nếu  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  là một họ trực giao các vectơ khác không trong một không gian có tích vô hướng thì  $S$  là độc lập tuyến tính.

*Chứng minh :* Giả sử

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m = \theta.$$

Muốn chứng minh  $S$  là độc lập tuyến tính ta phải chứng minh rằng từ đẳng thức trên ta suy ra  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ .

Nhân vô hướng hai vế của đẳng thức với  $v_i$  ta được

$$c_i \langle v_i, v_i \rangle = 0$$

vì  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  khi  $j \neq i$ . Ta suy ra  $c_i = 0$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, m$  vì  $\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 \neq 0$ . Vậy họ  $S$  độc lập tuyến tính.

Ta có hệ quả của định lí 5.6.2 và định nghĩa 5.4.2 như sau :

**Định lí 5.6.3.** Trong một không gian Euclid  $n$  chiều mọi họ  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  gồm  $n$  vectơ khác không mà trực giao đều là một cơ sở của không gian đó.

**Định nghĩa 5.6.6.** Cơ sở đó gọi là cơ sở trực giao của không gian Euclid. Nếu đồng thời độ dài của mỗi vectơ  $v_i$  bằng 1 nữa thì nó là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid.

**Thí dụ 5.6.8.** Họ ba vectơ ở thí dụ 4.7.6 là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid  $\mathbb{R}^3$ .

### 5.6.10. Sự tồn tại cơ sở trực chuẩn trong không gian Euclid $n$ chiều

**1. Định lí 5.6.4.** Trong mọi không gian Euclid  $n$  chiều khác  $\{\theta\}$  đều tồn tại ít nhất một cơ sở trực chuẩn.

*Chứng minh :* Giả sử  $V$  là một không gian Euclid  $n$  chiều khác rỗng và  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  là một cơ sở bất kì của  $V$ . Áp dụng quá trình trực giao hoá của Gram-Smidt (xem 5.6.8, định lí 5.6.1) ta sẽ được họ trực chuẩn gồm  $n$  vectơ

$$S' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Theo định lý 5.6.3,  $S'$  là một cơ sở của  $V$ . Vậy tồn tại một cơ sở trực chuẩn của  $V$ .

**2. Định lý 5.6.5.** Nếu  $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  là một cơ sở trực chuẩn của một không gian Euclid  $V$   $n$  chiều thì với mọi  $u \in V$  ta có

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

*Chứng minh :* Vì  $S$  là một cơ sở của  $V$  nên  $u$  có dạng

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n.$$

Nhân vô hướng hai vế với  $v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ta được

$$\begin{aligned} \langle u, v_i \rangle &= \langle c_1 v_1 + \dots + c_n v_n, v_i \rangle = \\ &= c_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + c_n \langle v_n, v_i \rangle. \end{aligned}$$

Vì  $S$  trực chuẩn nên

$$\langle v_j, v_i \rangle = 0, \quad j \neq i$$

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1.$$

Do đó phương trình trên đơn giản đi còn

$$\langle u, v_i \rangle = c_i.$$

Vậy  $u$  có dạng cần chứng minh.

**3. Ví dụ 5.6.9.** Cho

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \quad v_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right).$$

Dễ thấy rằng  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  là một họ trực chuẩn trong  $\mathbf{R}^3$  với tích vô hướng Euclid. Do đó nó là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbf{R}^3$ . Hãy biểu diễn  $u = (1, 1, 1)$  thành một tổ hợp tuyến tính của các vectơ của họ  $S$ .

*Giải :* Ta có :  $\langle u, v_1 \rangle = 1, \quad \langle u, v_2 \rangle = -\frac{1}{5}, \quad \langle u, v_3 \rangle = \frac{7}{5}$

Vậy, theo định lí 5.6.5. thì

$$u = v_1 - \frac{1}{5}v_2 + \frac{7}{5}v_3, \text{ nghĩa là}$$

$$(1, 1, 1) = (0, 1, 0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) + \frac{7}{5}\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right).$$

### 5.6.11. Hình chiếu của một vectơ lên một không gian con

1. Trước hết ta chứng minh một định lí xem như một bổ đề.

**Định lí 5.6.6.** Giả sử  $V$  là một không gian có tích vô hướng,  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  là một họ trực chuẩn các vectơ trong  $V$ ,  $W$  là không gian con sinh bởi  $S$ .

Xét  $u$  là một vectơ bất kì của  $V$ .

Ta đặt

$$w_1 = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_m \rangle v_m$$

$$w_2 = u - w_1.$$

Ta có

$$u = w_1 + w_2,$$

trong đó

(i)  $w_1 \in W = \text{span}\{S\}$

(ii)  $w_2$  trực giao với  $W$ , nghĩa là trực giao với mọi vectơ của  $W$ .

Chúng minh (i) hiển nhiên do biểu thức của  $w_1$ . Để chứng minh (ii) ta nhân vô hướng  $\langle w_2, v_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \langle w_2, v_i \rangle &= \langle u - w_1, v_i \rangle = \langle u, v_i \rangle - \langle w_1, v_i \rangle = \\ &= \langle u, v_i \rangle - \langle u, v_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Như vậy,  $w_2$  trực giao với mọi  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , nên dễ thấy nó trực giao với  $\text{span}\{S\} = W$ .

2. Định nghĩa hình chiếu trực giao

**Định nghĩa 5.6.7.** Ta gọi  $w_1$  là hình chiếu trực giao của  $u$  lên  $W$ , kí hiệu là  $h_{ch_w} u$  :

$$w_1 = h_{ch_w}u,$$

còn  $w_2 = u - h_{ch_w}u$  gọi là thành phần của  $u$  trực giao với  $W$ .

*Thí dụ 5.6.10.* Xét không gian  $\mathbf{R}^3$  (với tích vô hướng Euclid) và  $W$  là không gian con sinh bởi những vectơ trực giao

$$v_1 = (0, 1, 0), v_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right).$$

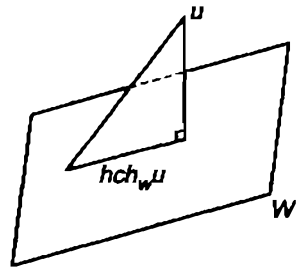
Hình chiếu trực giao của  $u = (1, 1, 1)$  lên  $W$  là

$$\begin{aligned} h_{ch_w}u &= \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 \\ &= 1(0, 1, 0) + -\frac{1}{5} \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) \\ &= \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \end{aligned}$$

Thành phần của  $u$  trực giao với  $W$  là

$$\begin{aligned} u - h_{ch_w}u &= (1, 1, 1) - \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) \\ &= \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right) \end{aligned}$$

(Xem hình 49).



Hình 49

BÀI TẬP 5.31 – 5.50.

## 5.7. TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN $n$ CHIỀU

### 5.7.1. Khái niệm toạ độ trong không gian $n$ chiều

*Định nghĩa 5.7.1.* Giả sử  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  là một cơ sở của không gian  $n$  chiều  $V$ . Lúc đó theo định lí 5.4.3, mọi  $v \in V$  có biểu diễn duy nhất

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, \quad c_i \in \mathbf{R}.$$



Các số  $c_1, c_2, \dots, c_n$  gọi là các toạ độ của  $v$  đối với cơ sở  $S$ .

Vectơ

$$(v)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

là một vectơ trong  $\mathbf{R}^n$  và được gọi là *vectơ toạ độ* của  $v$  đối với cơ sở  $S$ . Vectơ  $(v)_S$  viết ở dạng cột dẫn đến ma trận

$$[v]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

là một ma trận cỡ  $n \times 1$  và được gọi là *ma trận toạ độ* của  $v$  đối với cơ sở  $S$ .

*Thí dụ 5.7.1.* (a) Chứng minh rằng họ  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  với

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (2, 9, 0), \quad v_3 = (3, 3, 4)$$

tạo thành một cơ sở trong  $\mathbf{R}^3$ .

(b) Hãy tìm vectơ toạ độ và ma trận toạ độ của  $v = (5, -1, 9)$  đối với  $S$ .

(c) Hãy tìm vectơ  $w \in \mathbf{R}^3$  có vectơ toạ độ đối với  $S$  là  $(w)_S = (-1, 3, 2)$ .

*Giải :* (a) Đề nghị bạn đọc tự làm.

(b) Ta phải tìm các số  $c_1, c_2, c_3$  sao cho

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

tức là  $(5, -1, 9) = c_1 (1, 2, 1) + c_2 (2, 9, 0) + c_3 (3, 3, 4)$ .

Cân bằng các thành phần ở hai vế ta được

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 = -1 \\ c_1 + 4c_3 = 9 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được

$$c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 2.$$

Do đó

$$(v)_S = (1, -1, 2)$$

$$[v]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Dùng định nghĩa của vectơ tọa độ  $(w)_S$  ta có

$$w = (-1)v_1 + 3v_2 + 2v_3 = (11, 31, 7)$$

*Chú ý 5.7.1.* Các vectơ tọa độ và ma trận tọa độ phụ thuộc vào thứ tự của các vectơ cơ sở.

Trong một không gian hữu hạn chiều, khi cơ sở đã ấn định thì giữa các vectơ của không gian và các vectơ tọa độ (hay ma trận tọa độ) có tương ứng 1-1.

*Thí dụ 5.7.2.* Xét cơ sở  $S = \{1, x, x^2\}$  của  $P_2$ .

Xét 
$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2$$

thì 
$$(p)_S = (a_0, a_1, a_2)$$

$$[p]_S = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

*Thí dụ 5.7.3.* Xét không gian với hệ trục vuông góc  $Oxyz$  và xét cơ sở chính tắc  $S = \{i, j, k\}$  trong đó

$$i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$$

Khi đó nếu  $v = (a, b, c)$  là một vectơ bất kỳ thuộc  $\mathbf{R}^3$  thì

$$v = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

$$= a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Điều đó có nghĩa là

$$v = (a, b, c) = (v)_S$$

Nói cách khác, các thành phần của một vectơ  $v$  đối với một hệ trục vuông góc  $Oxyz$  cũng là những toạ độ của  $v$  đối với cơ sở chính tắc  $\{i, j, k\}$ .

**5.7.2. Toạ độ trong không gian Euclid (xem định nghĩa 5.7.1)**

Nếu  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  là một cơ sở trực chuẩn trong không gian Euclid  $n$  chiều  $V$ , thì theo định lý 5.6.5 biểu thức của vectơ  $u \in V$  đối với cơ sở  $S$  là

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Vậy  $(u)_S = (\langle u, v_1 \rangle, \langle u, v_2 \rangle, \dots, \langle u, v_n \rangle)$

và 
$$[u]_S = \begin{bmatrix} \langle u, v_1 \rangle \\ \langle u, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, v_n \rangle \end{bmatrix}.$$

*Thí dụ 5.7.4.* Nếu

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \quad v_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

thì như đã nhận xét ở thí dụ 5.6.9,  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  là 1 cơ sở trực chuẩn của không gian  $\mathbf{R}^3$  với tích vô hướng Euclid.

Với  $u = (2, -1, 4)$  ta có

$$(u, v_1) = -1, \quad (u, v_2) = \frac{4}{5}, \quad (u, v_3) = \frac{22}{5}.$$

Do đó  $(u)_S = \left(-1, \frac{4}{5}, \frac{22}{5}\right)$

$$[u]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{22}{5} \end{bmatrix}.$$

### 5.7.3. Biểu thức của tích vô hướng trong cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid

Các cơ sở trực chuẩn đối với không gian Euclid rất tiện lợi như sẽ thấy dưới đây.

Giả sử  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  là một cơ sở trực chuẩn trong không gian Euclid  $n$  chiều  $E$  :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Xét hai vectơ  $x$  và  $y$  thuộc  $E$ . Ta có :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n,$$

nghĩa là  $(x)_S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $(y)_S = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Khi đó

$$\langle x, y \rangle = \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = [x]_S^t [y]_S = [y]_S \cdot [x]_S \quad (5.7.1)$$

Đó là biểu thức tọa độ của tích vô hướng  $\langle x, y \rangle$  trong cơ sở trực chuẩn  $S$  của không gian Euclid  $E$ .

### 5.7.4. Độ dài và khoảng cách trong cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid

Từ kết quả (5.7.1) ở 5.7.3 ta suy ra

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$
$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

### 5.7.5. Đặc điểm của ma trận đối xứng xem là một toán tử tuyến tính trong không gian Euclid $n$ chiều

Bây giờ giả sử  $S$  là một cơ sở trực chuẩn trong không gian Euclid  $n$  chiều và  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$  đối xứng :

$$A = (a_{ij})_{n \times n}, \quad a_{ji} = a_{ij}$$

và  $(x)_S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$(y)_S = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Để cho gọn ta sẽ viết  $x := [x]_S$  và  $y := [y]_S$ .

**Định lý 5.7.1.**

$$A^t = A \Leftrightarrow \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in E.$$

*Chứng minh.*

1. Theo (5.7.1) ta có

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^t y = x^t A^t y$$

$$\langle x, Ay \rangle = x^t Ay$$

Vậy nếu  $A^t = A$  thì  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in E$ .

2. Bây giờ giả sử  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in E$ . Ta có

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_i, Ae_j \rangle \forall i, j$$

Nhưng

$$\langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_j, Ae_i \rangle = a_{ji}, \langle e_i, Ae_j \rangle = a_{ij}$$

Vậy  $a_{ji} = a_{ij}$ . Do đó  $A^t = A$ .

**BÀI TẬP 5.51 – 5.56.**

**5.8. BÀI TOÁN ĐỔI CƠ SỞ**

**5.8.1. Đặt bài toán**

Trong không gian vectơ  $n$  chiều  $V$ , giả sử có hai cơ sở

$$B = (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ và } B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$$

Ta sẽ quy ước gọi  $B$  là cơ sở cũ và  $B'$  là cơ sở mới.

Xét  $v \in V$ . Đối với cơ sở  $B$  ta có

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n \quad (5.8.1)$$

nghĩa là  $(v)_B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Đối với cơ sở  $B'$  ta có

$$v = v'_1 e'_1 + v'_2 e'_2 + \dots + v'_n e'_n \quad (5.8.2)$$

nghĩa là  $(v)_{B'} = (v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}$$

Hãy tìm liên hệ giữa  $(v)_B$  và  $(v)_{B'}$ , tức là giữa  $[v]_B$  và  $[v]_{B'}$ .

### 5.8.2. Ma trận chuyển

**Định nghĩa 5.8.1.** Ma trận  $P$  thoả mãn

$$[v]_B = P[v]_{B'} \quad (5.8.3)$$

gọi là ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$ .

Để có  $P$ , trước hết ta viết các biểu diễn của  $e'_i$  trong cơ sở  $B$ .

$$\begin{aligned} e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \dots + p_{n1}e_n \\ e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{n2}e_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \dots + p_{nn}e_n \end{aligned} \quad (5.8.4)$$



Vậy  $P$  xác định bởi (5.8.6) là ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$ .

Ma trận chuyển cơ sở  $P$  có tính chất sau :

**Định lí 5.8.1.** Nếu  $P$  là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở  $B$  sang cơ sở  $B'$  thì

(a)  $P$  khả đảo (tức là  $P$  không suy biến,  $\det(P) \neq 0$ )

(b)  $P^{-1}$  là ma trận chuyển cơ sở từ  $B'$  sang  $B$  :

$$[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B \quad (5.8.7)$$

Chứng minh : (a) Ma trận  $P$  không suy biến theo định lí 5.4.4.

(b) Vì  $P$  không suy biến nên tồn tại  $P^{-1}$ . Do đó (5.8.3) cho (5.8.7). Và (5.8.7) chứng tỏ rằng  $P^{-1}$  là ma trận chuyển cơ sở từ  $B'$  sang  $B$ .

**Chú ý 5.8.1.** Công thức (5.8.3) biểu diễn tọa độ cũ của vectơ  $v$  theo tọa độ mới của vectơ  $v$ .

Công thức (5.8.7) biểu diễn tọa độ mới của vectơ  $v$  theo tọa độ cũ của vectơ  $v$ .

Khi có một biểu thức của tọa độ cũ thì công thức (5.8.3) cho phép chuyển biểu thức đó thành biểu thức theo tọa độ mới.

**Thí dụ 5.8.1.** Cho các cơ sở trong  $\mathbf{R}^2$

$$B = \{e_1, e_2\} \text{ và } B' = \{e'_1, e'_2\}.$$

Các vectơ viết ở dạng cột :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e'_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$

(b) Tìm  $[v]_{B'}$  nếu  $v = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Giải : (a) Trước hết ta biểu diễn  $e'_1 = e_1 + e_2$   
 $e'_2 = 2e_1 + e_2$

Do đó

$$[e'_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [e'_2]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Vậy ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$  là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Do đó ma trận chuyển cơ sở từ  $B'$  sang  $B$  là

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Chú ý rằng ma trận này cũng có thể tìm được bằng cách biểu diễn  $e_1$  và  $e_2$  theo  $e'_1$  và  $e'_2$ .

Vì 
$$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 7e_1 + 2e_2 \text{ nên } [v]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Sau đây là một kết quả nữa :

### 5.8.3. Định lí 5.8.2

Nếu  $P$  là một ma trận chuyển cơ sở từ một cơ sở trực chuẩn sang một cơ sở trực chuẩn khác trong một không gian Euclid  $n$  chiều thì  $P$  là ma trận trực giao, trực giao theo nghĩa :

$$P^t P = I.$$

Do đó

$$P^{-1} = P^t.$$

*Chứng minh.* Giả sử tích vô hướng trong không gian Euclid kí hiệu là  $\langle \dots \rangle$ . Khi đó

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}, \quad \langle e'_i, e'_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Theo (5.8.4) ta có

$$\begin{aligned} \langle e'_i, e'_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n p_{ki} e_k, \sum_{l=1}^n p_{lj} e_l \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{ki} p_{lj} \langle e_k, e_l \rangle \\ &\Rightarrow \langle e'_i, e'_j \rangle = \sum_{k=1}^n p_{ki} p_{kj} \end{aligned}$$

Do đó 
$$\sum_{k=1}^n p_{ki} p_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Điều đó chứng tỏ  $P'P = I$ .

**Thí dụ 5.8.2.** Áp dụng vào phép quay trục vuông góc trong mặt phẳng, ta xét hệ trục tọa độ vuông góc  $Oxy$ . Quay nó đi một góc  $\alpha$  (hình 50). Một điểm  $Q$  của mặt phẳng có tọa độ  $(x, y)$  đối với hệ cũ  $Oxy$  sẽ có tọa độ mới là  $(x', y')$  đối với hệ mới  $Ox'y'$ .

Hãy tìm liên hệ giữa  $(x, y)$  và  $(x', y')$ .

*Giải :* Các vectơ viết ở dạng cột

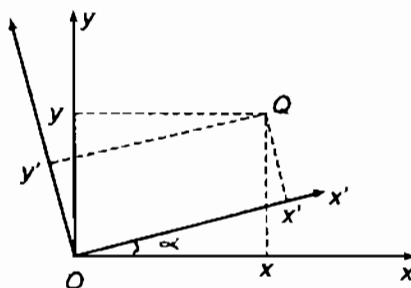
$$B = \{e_1, e_2\}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = \{e'_1, e'_2\}$$

$$e'_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$e'_2 = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$



Hình 50

Do đó ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$  là

$$P = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Vậy có

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Ta suy ra

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

Mặt khác, ta tính được

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Rõ ràng  $P^{-1} = P^t$

như định lí 5.8.2 đã khẳng định.

Vậy thí dụ 5.8.2 có thể xem là một minh hoạ cho định lí 5.8.2.

BÀI TẬP : 5.57 – 5.66.

## TÓM TẮT CHƯƠNG V

**Không gian vectơ trên trường số thực  $\mathbf{R}$**  là một tập  $V$  (mà mỗi phần tử quy ước gọi là một vectơ) với hai phép toán cộng vectơ và nhân vectơ với một số thực  $\mathbf{R}$ , thoả mãn 10 tính chất (gọi là 10 tiên đề của không gian vectơ) :

(1)  $x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$

(2)  $x + y = y + x$

(3)  $x + (y + z) = (x + y) + z$

(4)  $\exists \theta \in V$  sao cho  $\theta + x = x + \theta = x$

$\theta$  gọi là *phần tử trung hoà* của phép +

(5) Với mỗi  $x \in V$  tồn tại  $-x \in V$  sao cho

$$x + (-x) = (-x) + x = \theta$$

$-x$  gọi là *phần tử đối xứng* của  $x$

(6)  $x \in V, k \in \mathbf{R}$  thì  $kx \in V$

(7)  $k(x + y) = kx + ky, \quad k \in \mathbf{R}$

(8)  $(k + l)x = kx + lx, \quad k, l \in \mathbf{R}$

(9)  $k(lx) = (kl)x$

(10)  $1x = x$

Từ 10 tiên đề trên ta suy ra

- (a) Phần tử trung hoà  $\theta$  là duy nhất
- (b) Phần tử đối xứng của bất kì  $x$  nào thuộc  $V$  là duy nhất
- (c)  $\forall x \in V$  ta đều có  $0x = \theta$
- (d)  $\forall x \in V$  ta đều có  $(-1)x = -x$
- (e)  $\forall k \in \mathbf{R}$  ta đều có  $k\theta = \theta$
- (f)  $x \in V, k \in \mathbf{R}$  thì

$$kx = \theta \Rightarrow k = 0 \text{ hoặc } x = \theta.$$

**Không gian con** :  $W \subset V$  gọi là *không gian con* của  $V$  nếu với hai phép toán trong  $V$ ,  $W$  là một không gian vectơ.

Điều kiện cần và đủ để  $W \subset V$  là không gian con của  $V$  là nó khác rỗng và đóng kín đối với hai phép toán của  $V$ .

$V$  là một không gian vectơ

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V \text{ là một họ vectơ của } V.$$

Biểu thức

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \quad c_j \in \mathbf{R}$$

là một vectơ  $\in V$  và được gọi là *một tổ hợp tuyến tính* của họ  $S$ .

Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của họ  $S$  gọi là *bao tuyến tính* của  $S$ , kí hiệu là  $\text{span}(S)$ .

$\text{Span}(S)$  là một không gian con của  $V$ .

Nếu  $\text{span}(S) = V$  thì nói  $S$  *sinh ra*  $V$  hay  $S$  là một *hệ sinh* của  $V$ .

Họ  $S$  gọi là *độc lập tuyến tính* nếu điều kiện

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \theta$$

chỉ xảy ra khi  $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$ .

Nếu trái lại, tồn tại các số  $c_1, c_2, \dots, c_n$  không đồng thời bằng 0 để có điều kiện trên thì họ  $S$  gọi là *phụ thuộc tuyến tính*.

### Không gian hữu hạn chiều

Không gian vectơ  $V$  gọi là không gian  $n$  chiều,  $n \geq 1$  nếu trong  $V$  tồn tại  $n$  vectơ độc lập tuyến tính và không thể tồn tại quá  $n$  vectơ độc lập tuyến tính.

Tập chỉ gồm một phần tử trung hoà  $\theta$  của một không gian vectơ nào đó cũng là một không gian vectơ. Đó là những không gian không chiều.

Các không gian  $n$  chiều,  $n \geq 0$ , gọi là *không gian hữu hạn chiều*. Số chiều của chúng kí hiệu là  $\dim$ .

Nếu trong  $V$  tồn tại một số bất kì các vectơ độc lập tuyến tính thì  $V$  gọi là không gian vô số chiều.

Trong một không gian  $n$  chiều,  $n \geq 1$ , mỗi họ gồm  $n$  vectơ độc lập tuyến tính gọi là một *cơ sở của không gian*.

$V$  là một không gian vectơ

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$$

Nếu  $S$  độc lập tuyến tính và sinh ra  $V$  thì  $V$  là không gian  $n$  chiều và  $S$  là một cơ sở.

Nếu  $V$  là không gian  $n$  chiều và  $S$  là một cơ sở thì mọi  $x \in V$  có biểu diễn duy nhất

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

và ngược lại, nếu mọi  $x \in V$  có biểu diễn duy nhất như trên thì  $V$  là không gian  $n$  chiều và  $S$  là một cơ sở.

Nếu  $V$  là không gian  $n$  chiều và  $S = \{x_1, \dots, x_r\} \subset V$  là một họ vectơ độc lập tuyến tính và nếu  $r < n$  thì có thể bổ sung thêm  $n - r$  vectơ  $x_{r+1}, \dots, x_n$  nữa để họ

$$\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\}$$

là một cơ sở của  $V$ .

**Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi một họ vectơ**

$V$  là một không gian vectơ

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset V$$

Hạng của họ  $S$  là số vectơ độc lập tuyến tính tối đa có thể rút ra từ họ  $S$ . Kí hiệu hạng của họ  $S$  là  $r(S)$ .

Hạng của họ  $S$  có thể tính bằng biến đổi sơ cấp.

$$\dim(\text{span}(S)) = r(S).$$

Khi  $V$  là một không gian  $n$  chiều có cơ sở  $B$  thì trong  $B$  mỗi vectơ của họ  $S \subset V$  có  $n$  toạ độ. Hạng của họ  $S$  bằng hạng của ma trận có các hàng là toạ độ của các vectơ của  $S$  viết thành hàng hoặc hạng của ma trận có các cột là toạ độ của các vectơ  $S$  viết thành cột.

$V$  là không gian  $n$  chiều,  $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ . Nếu  $S$  sinh ra  $V$  thì  $S$  là một cơ sở của  $V$ .

**Tích vô hướng**

$V$  là một không gian vectơ

$$u, v \in V$$

Tích vô hướng của  $u$  và  $v$  là một số thực kí hiệu là  $\langle u, v \rangle$ , phụ thuộc  $u$  và  $v$ , thoả mãn 5 tính chất dưới đây gọi là 5 tiên đề của tích vô hướng .

- (1)  $\langle u, v \rangle$  xác định với mọi cặp  $u, v$  của  $V$
- (2)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- (3)  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- (4)  $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$
- (5)  $\langle u, v \rangle \geq 0$  và  $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \theta$ .

Không gian vectơ  $V$  trong đó tồn tại một tích vô hướng gọi là không gian có tích vô hướng.

Không gian  $V$   $n$  chiều có tích vô hướng gọi là không gian Euclid.

Nếu  $V = \mathbf{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$  thì

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

là một tích vô hướng. Ta gọi nó là *tích vô hướng Euclid của  $\mathbf{R}^n$*

*Độ dài.*  $V$  là không gian có tích vô hướng,  $v \in V$  thì

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Vectơ  $v$  có  $\|v\| = 1$  gọi là vectơ đã chuẩn hoá.

*Sự trực giao.*  $V$  là không gian có tích vô hướng

$$u, v \in V.$$

Nói  $u$  và  $v$  trực giao nếu  $\langle u, v \rangle = 0$ .

Họ vectơ  $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$  gọi là *họ trực giao* nếu

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \quad i \neq j$$

Họ  $S$  gọi là *trực chuẩn* nếu

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

*Cơ sở trực giao* trong không gian Euclid là một cơ sở gồm các vectơ trực giao.

*Cơ sở trực chuẩn* trong không gian Euclid là một cơ sở gồm các vectơ trực chuẩn.

Trong không gian Euclid bao giờ cũng tồn tại ít nhất một cơ sở trực chuẩn.

*Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

**Toạ độ trong không gian  $n$  chiều**

$V$  là không gian  $n$  chiều.

$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$  là một cơ sở

Khi đó mọi  $v \in V$  có biểu diễn duy nhất

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n.$$

Các số  $c_1, c_2, \dots, c_n$  gọi là các *tọa độ* của  $v$  đối với cơ sở  $S$ .

$(v)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  gọi là *vectơ tọa độ* của  $v$  đối với cơ sở  $S$ .

$$[v]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \text{ gọi là } \textit{ma trận tọa độ} \text{ của } v \text{ đối với cơ sở } S$$

Nếu  $V$  là không gian Euclid và  $S$  là cơ sở trực chuẩn thì

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$$

nên  $(v)_S = (\langle v, v_1 \rangle, \langle v, v_2 \rangle, \dots, \langle v, v_n \rangle)$

$$[v]_S = \begin{bmatrix} \langle v, v_1 \rangle \\ \langle v, v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n \rangle \end{bmatrix}$$

$V$  là không gian Euclid,  $S$  là cơ sở trực chuẩn

$$(u)_S = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (v)_S = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

thì  $\langle u, v \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$

### Bài toán đổi cơ sở

$V$  là không gian  $n$  chiều

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$  là một cơ sở

$B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$  là một cơ sở khác

$v \in V$  thì

$$(v)_B = (v_1, v_2, \dots, v_n), \quad (v)_{B'} = (v'_1, v'_2, \dots, v'_n).$$

Tồn tại ma trận  $P$  không suy biến để

$$(v)_B = P(v)_{B'}, \quad (v)_{B'} = P^{-1}(v)_B$$



theo nghĩa

$$[v]_B = P[v]_{B'}, \quad [v]_{B'} = P^{-1}[v]_B.$$

Ma trận  $P$  gọi là *ma trận chuyển cơ sở* từ  $B$  sang  $B'$ , còn gọi tắt là ma trận chuyển. Nó viết

$$P = [[e'_1]_B [e'_2]_B \dots [e'_n]_B]$$

Nếu  $V$  là không gian Euclid  $n$  chiều và

$B$  và  $B'$  là các cơ sở trực chuẩn thì

$$P^t P = I \text{ nghĩa là } P^{-1} = P^t.$$

## BÀI TẬP CHƯƠNG V

5.1. Trong các bài tập dưới đây người ta cho một tập các phần tử gọi là vectơ, hai phép tính cộng vectơ và nhân vectơ với một số. Hãy xác định tập nào là không gian vectơ và nếu có tập nào không phải là không gian vectơ thì chỉ ra các tiên đề mà tập đó không thoả mãn.

1) Tập tất cả các bộ ba số thực  $(x, y, z)$  với các phép tính

$$(x, y, z) + (x', y', z') := (x + x', y + y', z + z')$$

$$k(x, y, z) := (kx, y, z)$$

2) Tập các bộ ba số thực  $(x, y, z)$  với các phép tính

$$(x, y, z) + (x', y', z') := (x + x', y + y', z + z')$$

$$k(x, y, z) := (0, 0, 0)$$

3) Tập các cặp số thực  $(x, y)$  với các phép tính

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$$

$$k(x, y) := (2kx, 2ky)$$

4) Tập các số thực  $x$  với các phép tính cộng và nhân thông thường.

5) Tập các cặp số thực có dạng  $(x, y)$  trong đó  $x \geq 0$  với các phép tính thông thường trong  $\mathbf{R}^2$ .

6) Tập các cặp số thực  $(x, y)$  với các phép tính

$$(x, y) + (x', y') := (x + x' + 1, y + y' + 1)$$

$$k(x, y) := (kx, ky)$$

5.2. Hỏi mỗi tập dưới đây là không gian con của  $\mathbf{R}^3$  hay không :

(a) Các vectơ có dạng  $(a, 0, 0)$  ?

(b) Các vectơ có dạng  $(a, 1, 1)$  ?

(c) Các vectơ có dạng  $(a, b, c)$  với  $b = a + c$  ?

(d) Các vectơ có dạng  $(a, b, c)$  với  $b = a + c + 1$  ?

5.3. Gọi  $\mathcal{M}_2$  là tập các ma trận vuông cấp hai với phép cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực thông thường. Chứng minh rằng  $\mathcal{M}_2$  là một không gian vectơ. Hỏi mỗi tập dưới đây có là không gian con của  $\mathcal{M}_2$  không :

(a) Các ma trận có dạng

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

trong đó  $a, b, c$  là nguyên ?

(b) Các ma trận có dạng

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

trong đó  $a + d = 0$  ?

(c) Các ma trận cấp hai sao cho  $A = A^t$  ?

(d) Các ma trận cấp hai sao cho  $\det(A) = 0$  ?

5.4. Hỏi mỗi tập dưới đây có là không gian con của  $C[0, 1]$  không :

(a) Các  $f \in C[0, 1]$  sao cho  $f(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1]$  ?

(b) Các  $f \in C[0, 1]$  sao cho  $f(0) = 0$  ?

(c) Các  $f \in C[0, 1]$  sao cho  $f(0) = 2$  ?

(d) Các  $f$  là hằng ?

(e) Các  $f \in C[0, 1]$  có dạng  $k_1 + k_2 \sin x$ , trong đó  $k_1$  và  $k_2$  là các số thực.

**5.5.** Hỏi mỗi tập dưới đây có phải là không gian con của  $P_3$  không :

(a) Các đa thức  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  trong đó  $a_0 = 0$  ?

(b) Các đa thức  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  trong đó

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 ?$$

(c) Các đa thức  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  trong đó  $a_0, a_1, a_3$  là các số nguyên.

**5.6.** Hãy biểu diễn vectơ  $x$  thành tổ hợp tuyến tính của  $u, v, w$  :

a)  $x = (7, -2, 15)$  ;  $u = (2, 3, 5)$ ,  $v = (3, 7, 8)$ ,  $w = (1, -6, 1)$

b)  $x = (0, 0, 0)$  ;  $u, v, w$  như ở a).

c)  $x = (1, 4, -7, 7)$  ;  $u = (4, 1, 3, -2)$ ,  $v = (1, 2, -3, 2)$ ,

$$w = (16, 9, 1, -3)$$

d)  $x = (0, 0, 0, 0)$  ;  $u, v, w$  như ở c).

**5.7.** Hãy xác định  $\lambda$  sao cho  $x$  là tổ hợp tuyến tính của  $u, v, w$  :

a)  $u = (2, 3, 5)$ ,  $v = (3, 7, 8)$ ,  $w = (1, -6, 1)$  ;  $x = (7, -2, \lambda)$

b)  $u = (4, 4, 3)$ ,  $v = (7, 2, 1)$ ,  $w = (4, 1, 6)$  ;  $x = (5, 9, \lambda)$

c)  $u = (3, 4, 2)$ ,  $v = (6, 8, 7)$  ;  $x = (9, 12, \lambda)$

d)  $u = (3, 2, 5)$ ,  $v = (2, 4, 7)$ ,  $w = (5, 6, \lambda)$  ;  $x = (1, 3, 5)$

**5.8.** Hãy biểu diễn các đa thức sau thành tổ hợp tuyến tính của

$$p_1 = 2 + x + 4x^2, p_2 = 1 - x - 3x^2, p_3 = 3 + 2x + 5x^2$$

(a)  $5 + 9x + 5x^2$

(b)  $2 + 6x^2$

(c)  $0$

(d)  $2 + 2x + 3x^2$

5.9. Ma trận nào dưới đây là tổ hợp tuyến tính của

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};$$

(a)  $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}?$

(b)  $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}?$

(c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}?$

(d)  $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}?$

5.10. Mỗi họ vectơ dưới đây có sinh ra  $\mathbf{R}^3$  không

(a)  $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 0), v_3 = (3, 0, 0)?$

(b)  $v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (4, 1, 2), v_3 = (8, -1, 8)?$

(c)  $v_1 = (3, 1, 4), v_2 = (2, -3, 5), v_3 = (5, -2, 9), v_4 = (1, 4, -1)?$

(d)  $v_1 = (1, 3, 3), v_2 = (1, 3, 4), v_3 = (1, 4, 3), v_4 = (6, 2, 1)?$

5.11. Hàm nào dưới đây thuộc không gian sinh bởi

$$f = \cos^2 x \text{ và } g = \sin^2 x$$

(a)  $\cos 2x?$       (b)  $3 + x^2?$

(c)  $1?$               (d)  $\sin x?$

5.12. Hỏi các đa thức dưới đây có sinh ra  $P_3$  không

$$p_1 = 1 + 2x - x^2, \quad p_2 = 3 + x^2,$$

$$p_3 = 5 + 4x - x^2, \quad p_4 = -2 + 2x - 2x^2?$$

5.13. Các tập sau đây là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính :

(a)  $u_1 = (1, 2)$  và  $u_2 = (-3, -6)$  trong  $\mathbf{R}^2?$

(b)  $u_1 = (2, 3), u_2 = (-5, 8), u_3 = (6, 1)$  trong  $\mathbf{R}^2?$

(c)  $p_1 = 2 + 3x - x^2$  và  $p_2 = 6 + 9x - 3x^2$  trong  $P_2?$

(d)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  và  $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$  trong  $\mathcal{M}_2?$

**5.14.** Các tập dưới đây là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính :

a)  $(1, 2, 3), (3, 6, 7)$  trong  $\mathbf{R}^3$  ?

b)  $(4, -2, 6), (6, -3, 9)$  trong  $\mathbf{R}^3$  ?

c)  $(2, -3, 1), (3, -1, 5), (1, -4, 3)$  trong  $\mathbf{R}^3$  ?

d)  $(5, 4, 3), (3, 3, 2), (8, 1, 3)$  trong  $\mathbf{R}^3$  ?

**5.15.** Các tập dưới đây là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính :

a)  $(4, -5, 2, 6), (2, -2, 1, 3), (6, -3, 3, 9), (4, -1, 5, 6)$  trong  $\mathbf{R}^4$  ?

b)  $(1, 0, 0, 2, 5), (0, 1, 0, 3, 4), (0, 0, 1, 4, 7), (2, -3, 4, 11, 12)$   
trong  $\mathbf{R}^5$  ?

**5.16.** Tập nào trong  $P_2$  dưới đây là phụ thuộc tuyến tính :

(a)  $2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 1 + 10x - 4x^2$  ?

(b)  $3 + x + x^2, 2 - x + 5x^2, 4 - 3x^2$  ?

(c)  $6 - x^2, 1 + x + 4x^2$  ?

(d)  $1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2, 7 + 2x - x^2$  ?

**5.17.** Tập nào trong  $C(-\infty, +\infty)$  dưới đây là phụ thuộc tuyến tính :

(a)  $2, 4\sin^2x, \cos^2x$                       (b)  $x, \cos x$  ?

(c)  $1, \sin x, \sin 2x$                       (d)  $\cos 2x, \sin^2x, \cos^2x$

(e)  $(1+x)^2, x^2 + 2x, 3$                       (f)  $0, x, x^2$

**5.18.** Tìm  $\lambda$  thực làm cho các vectơ sau đây phụ thuộc tuyến tính  
trong  $\mathbf{R}^3$  :

$$v_1 = \left( \lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad v_2 = \left( -\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2} \right), \quad v_3 = \left( -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda \right)$$

**5.19.** Hãy giải thích tại sao các tập sau không phải là cơ sở của  
không gian tương ứng :

(a)  $u_1 = (1, 2), u_2 = (0, 3), u_3 = (2, 7)$  đối với  $\mathbf{R}^2$ .

(b)  $u_1 = (-1, 3, 2)$ ,  $u_2 = (6, 1, 1)$  đối với  $\mathbf{R}^3$ .

(c)  $p_1 = 1 + x + x^2$ ,  $p_2 = x - 1$  đối với  $P_2$ .

(d)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ,

$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$  đối với  $\mathcal{M}_2$ .

**5.20.** Họ nào dưới đây là cơ sở trong  $\mathbf{R}^2$  :

(a) (2, 1), (3, 0)

(b) (4, 1), (-7, -8)

(c) (0, 0), (1, 3)

(d) (3, 9), (-4, -12)

**5.21.** Họ nào dưới đây là cơ sở trong  $\mathbf{R}^3$

(a) (1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)

(b) (3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)

(c) (2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)

(d) (1, 6, 4), (2, 4, -1), (-1, 2, 5)

**5.22.** Họ nào dưới đây là cơ sở trong  $P_2$

(a)  $1 - 3x + 2x^2$ ,  $1 + x + 4x^2$ ,  $1 - 7x$

(b)  $4 + 6x + x^2$ ,  $-1 + 4x + 2x^2$ ,  $5 + 2x - x^2$

(c)  $1 + x + x^2$ ,  $x + x^2$ ,  $x^2$

(d)  $-4 + x + 3x^2$ ,  $6 + 5x + 2x^2$ ,  $8 + 4x + x^2$

**5.23.** Chứng minh rằng họ sau đây là cơ sở trong  $\mathcal{M}_2$

(a)  $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**5.24.** Xác định số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của các hệ sau

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 4x + 8y - 3z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

**5.25.** Xác định cơ sở của các không gian con của  $\mathbf{R}^3$ :

(a) Mặt phẳng  $3x - 2y + 5z = 0$

(b) Mặt phẳng  $x - y = 0$

(c) Đường thẳng 
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t, \\ z = 4t \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

(d) Các vectơ có dạng  $(a, b, c)$ , trong đó  $b = a + c$ .

5.26. Xác định số chiều của các không gian con của  $\mathbf{R}^4$

(a) Các vectơ có dạng  $(a, b, c, 0)$ .

(b) Các vectơ có dạng  $(a, b, c, d)$  trong đó  $d = a + b$  và  $c = a - b$ .

(c) Các vectơ có dạng  $(a, b, c, d)$  trong đó  $a = b = c = d$ .

5.27. Xác định số chiều của không gian con của  $P_3$  gồm các đa thức

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \text{với } a_0 = 0$$

5.28. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của  $\mathbf{R}^3$  sinh bởi các vectơ sau

a)  $(1, -1, 2), (2, 1, 3), (-1, 5, 0)$

b)  $(2, 4, 1), (3, 6, -2), (-1, 2, -\frac{1}{2})$

5.29. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của  $\mathbf{R}^4$  sinh bởi các vectơ sau

a)  $(1, 1, -4, -3), (2, 0, 2, -2), (2, -1, 3, 2)$

b)  $(-1, 1, -2, 0), (3, 3, 6, 0), (9, 0, 0, 3)$

c)  $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-2, 0, 2, 2), (0, -3, 0, 3)$

d)  $(1, 0, 1, -2), (1, 1, 3, -2), (2, 1, 5, -1), (1, -1, 1, 4)$

5.30. a) Chứng minh rằng tập các hàm khả vi trên  $[a, b]$  và thoả mãn

$$f' + 4f = 0$$

tạo thành một không gian con của  $C[a, b]$ .

b) Tìm số chiều và một cơ sở của nó.



5.31. 1) Tính tích vô hướng Euclid trong  $\mathbf{R}^2$  của

a)  $u = (2, -1)$ ,  $v = (-1, 3)$

b)  $u = (0, 0)$ ,  $v = (7, 2)$

2) Tính độ dài Euclid của  $u$  và  $v$  và kiểm tra lại bất đẳng thức C - S.

5.32. 1) Với hai ma trận trong  $\mathcal{M}_2$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

Hãy chứng minh rằng biểu thức

$$\langle u, v \rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$$

là một tích vô hướng.

2) Áp dụng để tính tích vô hướng của

$$u = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Kiểm tra lại bất đẳng thức C - S.

5.33. Với  $p$  và  $q \in P_2$  :

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad q = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

1) Chứng minh rằng

$$\langle p, q \rangle := a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

là một tích vô hướng trong  $P_2$ .

2) Áp dụng để tính tích vô hướng của

$$p = -1 + 2x + x^2, \quad q = 2 - 4x^2.$$

3) Kiểm tra lại bất đẳng thức C - S.

4) Chứng minh rằng

$$\langle p, q \rangle := p(0)q(0) + p\left(\frac{1}{2}\right)q\left(\frac{1}{2}\right) + p(1)q(1)$$

cũng là một tích vô hướng trong  $P_2$ .

5) Làm lại phần 2) với tích vô hướng mới.

6) Làm lại phần 3) với tích vô hướng mới.

5.34. Xét  $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3$

Hỏi biểu thức nào dưới đây có thể là một tích vô hướng trong  $\mathbf{R}^3$ , nếu không được thì nêu lí do :

a)  $\langle u, v \rangle := u_1 v_1 + u_3 v_3$  ;

b)  $\langle u, v \rangle := u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2$  ;

c)  $\langle u, v \rangle := 2u_1 v_1 + u_2 v_2 + 4u_3 v_3$  ;

d)  $\langle u, v \rangle := u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_3$ .

5.35. Trong  $\mathbf{R}^2$  ta xét tích vô hướng Euclid. Hãy áp dụng bất đẳng thức C – S để chứng minh

$$|a \cos \theta + b \sin \theta| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

5.36. Với  $f = f(x), g = g(x) \in P_2$ . Chứng minh rằng

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

là một tích vô hướng.

Hãy tính tích vô hướng của

a)  $f = 1 - x + x^2 + 5x^3, g = x - 3x^2$  ;

b)  $f = x - 5x^3, g = 2 + 8x^2$ .

5.37. Với tích vô hướng Euclid trong  $\mathbf{R}^3$ , hãy xác định  $k$  để  $u$  và  $v$  trực giao

a)  $u = (2, 1, 3), v = (1, 7, k)$  ;

b)  $u = (k, k, 1), v = (k, 5, 6)$ .

5.38. Với tích vô hướng trong  $P_2$  ở bài tập 5.33.1 chứng minh rằng

$$p = 1 - x + 2x^2 \text{ và } q = 2x + x^2$$

trực giao.

5.39. Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Với tích vô hướng ở bài tập

5.32, hỏi trong các ma trận dưới đây ma trận nào trực giao với  $A$  :

a)  $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  ?

b)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  ?

c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ?

d)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  ?

5.40. Với tích vô hướng Euclid trong  $\mathbb{R}^4$ , hãy tìm hai vectơ có chuẩn bằng 1 và trực giao với các vectơ sau

$$u = (2, 1, -4, 0), v = (-1, -1, 2, 2), w = (3, 2, 5, 4)$$

5.41.  $V$  là không gian có tích vô hướng. Chứng minh

$$1) \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2$$

đối với mọi  $u, v \in V$ .

5.42. Xét không gian  $C[0, \pi]$  với tích vô hướng

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{\pi} f(x)g(x)dx$$

và xét các hàm số  $f_n(x) = \cos nx$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng  $f_k$  và  $f_l$  trực giao nếu  $k \neq l$ .

5.43. Cho  $x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  và  $y = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$ .

Chứng minh rằng  $x$  và  $y$  trực chuẩn trong  $\mathbf{R}^2$  theo tích vô hướng  $\langle u, v \rangle := 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ , nhưng không trực chuẩn theo tích vô hướng Euclid

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$$

**5.44.** Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 0, 1), & u_2 &= (-1, 0, 2, 1), \\ u_3 &= (2, 3, 2, -2), & u_4 &= (-1, 2, -1, 1). \end{aligned}$$

là một họ trực giao trong  $\mathbf{R}^4$  đối với tích vô hướng Euclid.

**5.45.** Trong  $\mathbf{R}^2$  có tích vô hướng Euclid. Hãy áp dụng quá trình Gram – Smidt để biến cơ sở  $\{u_1, u_2\}$  dưới đây thành cơ sở trực chuẩn

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad u_1 &= (1, -3), & u_2 &= (2, 2), \\ \text{(b)} \quad u_1 &= (1, 0), & u_2 &= (3, -5). \end{aligned}$$

**5.46.** Trong  $\mathbf{R}^3$  xét tích vô hướng Euclid. Hãy áp dụng quá trình Gram – Smidt để biến cơ sở  $\{u_1, u_2, u_3\}$  dưới đây thành cơ sở trực chuẩn

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad u_1 &= (1, 1, 1), & u_2 &= (-1, 1, 0), & u_3 &= (1, 2, 1); \\ \text{(b)} \quad u_1 &= (1, 0, 0), & u_2 &= (3, 7, -2), & u_3 &= (0, 4, 1). \end{aligned}$$

**5.47.** Trong  $\mathbf{R}^3$  xét tích vô hướng Euclid. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn trong không gian con sinh bởi các vectơ  $(0, 1, 2)$  và  $(-1, 0, 1)$ .

**5.48.** Trong  $\mathbf{R}^3$  xét tích vô hướng  $\langle u, v \rangle := u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ . Hãy áp dụng quá trình Gram – Smidt để biến

$$u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)$$

thành một cơ sở trực chuẩn.

**5.49.** Không gian con của  $\mathbf{R}^3$  sinh bởi  $u_1 = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$  và

$u_2 = (0, 1, 0)$  là một mặt phẳng đi qua gốc. Hãy biểu diễn  $w = (1, 2, 3)$  thành  $w = w_1 + w_2$  trong đó  $w_1$  nằm trong mặt phẳng còn  $w_2$  trực giao với mặt phẳng.

5.50. Trong  $P_2$  xét tích vô hướng

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

Hãy áp dụng quá trình Gram – Smidt để biến cơ sở chuẩn tắc  $\{1, x, x^2\}$  thành một cơ sở trực chuẩn.

5.51. Hãy tìm ma trận tọa độ và vectơ tọa độ của  $w$  đối với cơ sở  $S = \{u_1, u_2\}$  trong đó

(a)  $u_1 = (1, 0), \quad u_2 = (0, 1), \quad w = (3, -7) ;$

(b)  $u_1 = (2, -4), \quad u_2 = (3, 8), \quad w = (1, 1) ;$

(c)  $u_1 = (1, 1), \quad u_2 = (0, 2), \quad w = (a, b).$

5.52. Hãy tìm ma trận tọa độ và vectơ tọa độ của  $w$  đối với cơ sở  $S = \{u_1, u_2, u_3\}$  trong đó

(a)  $w = (2, -1, 3), \quad u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (2, 2, 0), \quad u_3 = (3, 3, 3) ;$

(b)  $w = (5, -12, 3), \quad u_1 = (1, 2, 3), \quad u_2 = (-4, 5, 6), \quad u_3 = (7, -8, 9) ;$

5.53. Hãy tìm vectơ tọa độ và ma trận tọa độ của  $A$  đối với cơ sở  $B \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  trong đó

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.54. Hãy tìm vectơ tọa độ và ma trận tọa độ của đa thức  $p$  đối với cơ sở  $B = \{p_1, p_2, p_3\}$  trong đó

$$p = 4 - 3x + x^2, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2.$$

5.55. Trong  $\mathbf{R}^2$  và  $\mathbf{R}^3$  xét tích vô hướng Euclid và một cơ sở trực chuẩn. Hãy tìm vectơ tọa độ và ma trận tọa độ của  $w$

$$(a) w = (3, 7), u_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), u_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right);$$

$$(b) w = (-1, 0, 2), \quad u_1 = \left( \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

$$u_2 = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), \quad u_3 = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

5.56. Trong  $\mathbf{R}^2$  xét tích vô hướng Euclid. Xét  $S = \{w_1, w_2\}$  với  $w_1 = \left( \frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right), w_2 = \left( \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right)$ .

(a) Chứng minh  $S$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbf{R}^2$ .

(b) Cho  $u$  và  $v \in \mathbf{R}^2$  với  $(u)_S = (1, 1), (v)_S = (-1, 4)$ .

Hãy tính  $\|u\|$ ,  $d(u, v)$  và  $\langle u, v \rangle$ .

(c) Tìm  $u$  và  $v$  rồi tính  $\|u\|$ ,  $d(u, v)$  và  $\langle u, v \rangle$  một cách trực tiếp.

5.57. Xét các cơ sở  $B = \{u_1, u_2\}$  và  $B' = \{v_1, v_2\}$  của  $\mathbf{R}^2$  trong đó  $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(a) Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$ .

(b) Hãy tính ma trận tọa độ  $[w]_{B'}$  trong đó  $w = (3, -5)$  và tính  $[w]_B$ .

(c) Tính  $[w]_{B'}$  trực tiếp và kiểm tra lại kết quả trên

(d) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $B'$  sang  $B$ .

5.58. Làm lại bài tập 5.57 với

$$u_1 = (2, 2), u_2 = (4, -1), v_1 = (1, 3), v_2 = (-1, -1).$$

5.59. Xét trong  $\mathbf{R}^3$  hai cơ sở  $B = \{u_1, u_2, u_3\}, B' = \{v_1, v_2, v_3\}$  trong đó

$$u_1 = (-3, 0, -3), u_2 = (-3, 2, 1), u_3 = (1, 6, -1);$$

$$v_1 = (-6, -6, 0), v_2 = (-2, -6, 4), v_3 = (-2, -3, 7).$$

- (a) Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $B'$  sang  $B$ .
- (b) Tính ma trận tọa độ  $[w]_B$  của  $w = (-5, 8, -5)$  và tính  $[w]_{B'}$ .
- (c) Tính trực tiếp  $[w]_{B'}$  và kiểm tra lại kết quả trên.

**5.60.** Làm lại bài tập 5.59 với

$$u_1 = (2, 1, 1), u_2 = (2, -1, 1), u_3 = (1, 2, 1)$$

$$v_1 = (3, 1, -5), v_2 = (1, 1, -3), v_3 = (-1, 0, 2).$$

**5.61.** Trong  $P_1$  xét các cơ sở  $B = \{p_1, p_2\}$ ,  $B' = \{q_1, q_2\}$  với  $p_1 = 6 + 3x$ ,  
 $p_2 = 10 + 2x$

$$q_1 = 2, q_2 = 3 + 2x$$

- (a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $B'$  sang  $B$ .
- (b) Tính ma trận tọa độ  $[p]_B$  với  $p = -4 + x$  rồi suy ra  $[p]_{B'}$ .
- (c) Tính trực tiếp  $[p]_{B'}$  và kiểm tra lại kết quả trên.
- (d) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$ .

**5.62.** Gọi  $V$  là không gian sinh bởi  $f_1 = \sin x$  và  $f_2 = \cos x$ ,

(a) Chứng minh rằng  $g_1 = 2\sin x + \cos x$  và  $g_2 = 3\cos x$  tạo thành một cơ sở của  $V$ .

- (b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $B' = \{g_1, g_2\}$  sang  $B = \{f_1, f_2\}$ .
- (c) Tính ma trận tọa độ  $[h]_B$  với  $h = 2\sin x - 5\cos x$  và suy ra  $[h]_{B'}$ .
- (d) Tính trực tiếp  $[h]_{B'}$  và kiểm tra lại kết quả trên.
- (e) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$ .

**5.63.** Trong mặt phẳng xét hệ trục vuông góc  $Oxy$ , và quay nó đi một góc  $\theta = 3\pi/4$  quanh gốc ta được hệ trục vuông góc  $Ox'y'$ .

- (a) Tìm tọa độ trong hệ mới của điểm  $(-2, 6)$  trong hệ cũ.
- (b) Tìm tọa độ trong hệ cũ của điểm  $(5, 2)$  trong hệ mới.

**5.64.** Hỏi trong các ma trận dưới đây ma trận nào là trực giao?

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

(b)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ .

$$(c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$(d) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Tính ma trận nghịch đảo của các ma trận trực giao đó.

**5.65.** Chứng minh rằng hai ma trận dưới đây là trực giao với mọi giá trị của  $\theta$  :

$$a) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$b) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính nghịch đảo của chúng.

**5.66.** Xét biến đổi tọa độ trong mặt phẳng

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

1) Chứng minh rằng nó là trực giao.

2) Tìm  $(x', y')$  của những điểm mà  $(x, y)$  là

a)  $(2, -1)$ ;      b)  $(4, 2)$ ;      c)  $(-7, -8)$ ;      d)  $(0, 0)$

**5.67.** Giải hệ

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 2 \\ -11x_1 - 15x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

**5.68.** Giải hệ

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$



5.69. Giải hệ

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$$

**ĐÁP SỐ**

5.1. 1) Không - Tiên đề 8 không thoả mãn

2) Không - Tiên đề 10 không thoả mãn

3) Không - Tiên đề 9 và 10 không thoả mãn

4) Có

5) Không. Tiên đề 5 và 6 không thoả mãn

6) Không. Tiên đề 7 và 8 không thoả mãn

5.2. a) có ; b) không ; c) có ; d) không

5.3. a) không ; b) có ; c) có ; d) không

5.4. a) không ; b) có ; c) không ; d) có ; e) có

5.5. a) có ; b) có ; không

5.6. a)  $(7, -2, 15) = (11 - 5t)u - (5 - 3t)v + tw$ ,  $t$  bất kì

b)  $(0, 0, 0) = t(-5u + 3v + w)$ ,  $t$  bất kì

c)  $(1, 4, -7, 7) = 3u + 5v - w$

d)  $(0, 0, 0, 0) = 0u + 0v + 0w$  (duy nhất)

5.7. a)  $\lambda = 15$  ; b)  $\lambda$  bất kì ; c)  $\lambda$  bất kì ; d)  $\lambda \neq 12$

5.8. a)  $5 + 9x + 5x^2 = -12p_1 - p_2 + 10p_3$

b)  $2 + 6x^2 = 4p_1 - 2p_3$

c)  $0 = 0p_1 + 0p_2 + 0p_3$

d)  $2 + 2x + 3x^2 = -\frac{11}{8}p_1 - \frac{1}{8}p_2 + \frac{13}{8}p_3$

5.9. a) có ; b) không ; c) có ; d) có

5.10. a) có ; b) không ; c) không ; d) có

5.11. a) và c)

5.12. không

5.13. a)  $u_2 = -3u_1$  ; b) phụ thuộc tuyến tính

c)  $p_2 = 3p_1$  ; d)  $B = -A$

5.14. a) độc lập ; b) phụ thuộc ; c) độc lập ; d) phụ thuộc.

5.15. a) phụ thuộc ; b) độc lập.

5.16. a) độc lập ; b) độc lập ; c) độc lập ; d) phụ thuộc

5.17. a) phụ thuộc ; b) độc lập ; c) độc lập ; d) phụ thuộc

e) phụ thuộc ; f) phụ thuộc

5.18.  $\lambda = -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 1$

5.19. a) Một cơ sở trong  $\mathbf{R}^2$  có hai vectơ

b) Một cơ sở trong  $\mathbf{R}^3$  có ba vectơ

c) Một cơ sở trong  $\mathbf{P}_2$  có ba vectơ

d) Một cơ sở trong  $\mathcal{M}_2$  có bốn vectơ

5.20. a) và b)

5.21. a) và b)

5.22. c) và d)

5.24. 1) Không có cơ sở,  $\dim = 0$ .

2) Cơ sở là  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right)$ ,  $(0, -1, 0, 1)$  ;  $\dim = 2$

3) Không có cơ sở,  $\dim = 0$ .

4) Cơ sở là  $(3, 1, 0)$ ,  $(-1, 0, 1)$  ;  $\dim = 2$

5) Không có cơ sở,  $\dim = 0$

6) Không có cơ sở,  $\dim = 0$

5.25. a)  $\left(\frac{2}{3}, 1, 0\right), \left(-\frac{5}{3}, 0, 1\right)$ ; b)  $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$

c)  $(2, +1, 4)$ ; d)  $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$

5.26. a) 3; b) 2; c) 1

5.27. 3

5.28. a) và b) Số chiều bằng 3 và một cơ sở là ba vectơ đã cho.

5.29. a) Số chiều bằng 3 và  $(1, 1, -4, -3), (0, 1, -5, -2), (0, 0, 1, -\frac{1}{2})$

là một cơ sở.

b) Số chiều bằng 3 và  $(1, -1, 2, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -\frac{1}{6})$  là một

cơ sở.

c) Số chiều bằng 4 và  $(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)$  là một cơ sở.

d) Số chiều bằng 3 và  $(1, 0, 1, -2), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 3)$  là một cơ sở.

5.31. 1) a) -5; b) 0

5.32. 20

5.33. -6;  $-\frac{23}{4}$

5.34. a) Không, tiên đề 5 không thoả mãn.

b) Không, tiên đề 3 không thoả mãn.

c) Có.

d) Không, tiên đề 5 không thoả mãn.

5.36. a)  $-28/15$ ; b)  $-\frac{68}{3}$

5.37. a)  $k = -3$ ; b)  $k = -2, k = -3$ .

5.39. a) b)

5.40.  $\pm \frac{1}{\sqrt{3249}}(-34, 44, -6, 11)$

5.45. a)  $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ ; b)  $(1, 0), (0, -1)$

5.46. a)  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

b)  $(1, 0, 0), \left(0, \frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right), \left(0, 30\sqrt{11925}, \frac{105}{\sqrt{11925}}\right)$

5.47.  $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$

5.48.  $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$

5.49.  $w_1 = \left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right), w_2 = \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right)$

5.50.  $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}} - 3\sqrt{\frac{5}{8}}x^2$

5.51. a)  $(w)_s = (3, -7)$ ;  $[w]_s = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$

b)  $(w)_s = (5/28, 3/14)$ ;  $[w]_s = \begin{bmatrix} 5/28 \\ 3/14 \end{bmatrix}$

c)  $(w)_s = \left(a, \frac{b-a}{2}\right)$ ;  $[w]_s = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b-a}{2} \end{bmatrix}$

5.52. a)  $(w)_s = (3, -2, 1)$ ;  $[w]_s = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b)  $(w)_s = (-2, 0, 1)$ ;  $[w]_s = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$5.53. (A)_B = (-1, 1, -1, 3); [A]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$5.54. (p)_B = (4, -3, 1); [p]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$5.55. a) (w)_S = (-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2}); [w]_S = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$b) (w)_S = (0, -2, 1); [w]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$5.56. b) \|u\| = \sqrt{2}, d(u, v) = \sqrt{13}, \langle u, v \rangle = 3$$

$$5.57. a) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b) [w]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, [w]_{B'} = \begin{bmatrix} -3/11 \\ -13/11 \end{bmatrix}$$

$$d) \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5.58. a) \begin{bmatrix} 13/10 & -1/2 \\ -2/5 & 0 \end{bmatrix}, \quad b) [w]_B = \begin{bmatrix} -17/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}, [w]_{B'} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 0 & +5/2 \\ -2 & -13/2 \end{bmatrix}$$

$$5.59. a) \begin{bmatrix} 3/4 & \frac{2}{3} & 1/12 \\ -3/4 & -\frac{3}{2} & -17/12 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$b) [w]_B = \begin{bmatrix} 31/21 \\ 4/7 \\ 8/7 \end{bmatrix}, \quad [w]_{B'} = \begin{bmatrix} 19/12 \\ -43/12 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

5.60. a)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5/2 \\ -2 & -3 & -1/2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$       b)  $[w]_B = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$ ,  $[w]_{B'} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ 23/2 \\ 6 \end{bmatrix}$ .

5.61. a)  $\begin{bmatrix} 3/4 & 7/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$ ,      b)  $[p]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $[p]_{B'} = \begin{bmatrix} -11/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} -2/9 & 7/9 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$

5.62. b)  $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$       c)  $[h]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ ,  $[h]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

5.63. a)  $(4\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ ,      b)  $(-3,5\sqrt{2}, 1,5\sqrt{2})$

5.64. a) Trục giao và  $A^{-1} = A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , b)  $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ,

d) Trục giao và  $A^{-1} = A' = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

5.66. a)  $(-2, -1)$ ,      b)  $(-4/5, -22/5)$ ;  
c)  $(-11/5, 52/5)$ ;      d)  $(0, 0)$

5.67.  $x_1 = 22x_3 - 33x_4 - 11$

$x_2 = -16x_3 + 24x_4 + 8$

5.68. Hệ không tương thích (vô nghiệm).

5.69. Hệ có nghiệm duy nhất

$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1.$

## Chương VI

# ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

### 6.1. KHÁI NIỆM ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

#### 6.1.1. Mở đầu

$V$  và  $W$  là hai không gian vectơ.

Trong số các ánh xạ từ  $V$  tới  $W$  có một lớp rất quan trọng là lớp các ánh xạ tuyến tính mà ta sẽ trình bày dưới đây.

#### 6.1.2. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

**Định nghĩa 6.1.1.** Ánh xạ  $T : V \rightarrow W$  từ không gian vectơ  $V$  tới không gian vectơ  $W$  gọi là ánh xạ tuyến tính nếu nó có hai tính chất sau

$$(i) T(u + v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in V$$

$$(ii) T(ku) = kT(u) \quad \forall k \in \mathbf{R}, \forall u \in V.$$

Trong trường hợp  $W$  trùng với  $V$  thì ánh xạ tuyến tính  $T : V \rightarrow V$  gọi là toán tử tuyến tính (trên  $V$ ).

#### 6.1.3. Thí dụ

**Thí dụ 6.1.1.** Xét ánh xạ  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  xác định bởi

$$T(x, y) = (x, x + y, x - y)$$

Nếu  $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$  thì

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

nên

$$\begin{aligned} T(u+v) &= ((x_1+x_2), (x_1+x_2) + (y_1+y_2), (x_1+x_2) - (y_1+y_2)) \\ &= (x_1, x_1+y_1, x_1-y_1) + (x_2, x_2+y_2, x_2-y_2) \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

Nếu  $k \in \mathbf{R}$  thì  $ku = (kx_1, ky_1)$  nên

$$\begin{aligned} T(ku) &= (kx_1, kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1) \\ &= k(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) = kT(u). \end{aligned}$$

Vậy ánh xạ  $T$  đã cho là tuyến tính.

*Chú ý 6.1.1.* Nếu  $T: V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính thì

$$\begin{aligned} T(k_1v_1 + k_2v_2) &= T(k_1v_1) + T(k_2v_2) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2) \\ \forall v_1, v_2 \in V, \forall k_1, k_2 \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Một cách tương tự

$$\begin{aligned} T(k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_mv_m) &= k_1T(v_1) + \dots + k_mT(v_m) \\ \forall v_1, v_2, \dots, v_m \in V, \forall k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

*Chú ý 6.1.2.* Về cách nhân ma trận với vectơ ( $n$  chiều)

Xét ma trận  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

và vectơ  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . Ta muốn tìm một cách nhân  $A$  với  $x$ . Muốn thế ta viết  $x$  ở dạng vectơ cột

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Như vậy  $[x]$  là một ma trận cỡ  $n \times 1$ ,  $[x] \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ .



Rõ ràng có liên hệ qua lại

$$x \in \mathbf{R}^n \Leftrightarrow [x] \in \mathcal{M}_{n \times 1} \quad (6.1.1)$$

Ta có :  $[x + y] = [x] + [y]$

$$[kx] = k[x]$$

Đối với  $[x] \in \mathcal{M}_{n \times 1}$  ta có thể nhân

$$A[x] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

và có  $A[x] \in \mathcal{M}_{m \times 1}$ .

Do đó ta có chú ý sau

Khi  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$  và  $x \in \mathbf{R}^n$  ta hiểu ngầm  $x := [x]$  và  $Ax$  là  $A$  nhân với  $x$  ở dạng cột tức là

$$Ax := A[x] \quad (6.1.2)$$

tức là

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

Chẳng hạn với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}, x = (1, 2) \in \mathbf{R}^2$$

thì

$$Ax := A[x] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.2 \\ 3.1 + 4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Bây giờ ta xét tiếp một số thí dụ về ánh xạ tuyến tính.

*Thí dụ 6.1.2.* Giả sử  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ . Ta xét quy luật  $T$

$$x \in \mathbf{R}^n \mapsto T(x) \text{ sao cho } [T(x)] = A[x]. \quad (6.1.3)$$

Trước hết, theo (6.1.1)

$$x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow [x] \in \mathcal{M}_{n \times 1} \Rightarrow A[x] \in \mathcal{M}_{m \times 1}. \text{ Do đó theo (6.1.3)}$$

$$[T(x)] \in \mathcal{M}_{m \times 1}.$$

Vậy theo (6.1.1),  $T(x) \in \mathbf{R}^m$ .

Vậy (6.1.3) chứng tỏ  $T$  là một ánh xạ từ  $\mathbf{R}^n$  tới  $\mathbf{R}^m$ .

Bây giờ ta chứng minh ánh xạ  $T$  là tuyến tính.

Giả sử  $x$  và  $y \in \mathbf{R}^n$ , ta có  $x + y \in \mathbf{R}^n$ ,  $kx \in \mathbf{R}^n$ . Do đó

$$[T(x + y)] = A[x + y] = A([x] + [y]) = A[x] + A[y] = [T(x)] + [T(y)]$$

$$[T(kx)] = A[kx] = A(k[x]) = kA[x] = k[T(x)].$$

Vậy  $T$  là ánh xạ tuyến tính từ  $\mathbf{R}^n$  tới  $\mathbf{R}^m$ . Nó thực hiện theo (6.1.3) như sau :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mapsto T(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m \text{ thông qua}$$

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto A[x] = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n \\ \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Ánh xạ tuyến tính ở thí dụ này gọi là *ánh xạ nhân với ma trận* hay *ánh xạ ma trận*.

Theo (6.1.2) ánh xạ ấy cũng có thể viết là  $Ax$ .

*Thí dụ 6.1.3.* Xét một trường hợp riêng của thí dụ trên. Gọi  $\alpha$  là một góc xác định và  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  là ánh xạ nhân với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Nếu  $v = (x, y) \in \mathbf{R}^2$  tức là

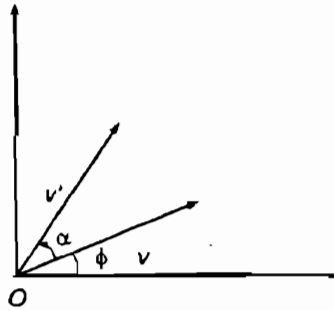
$$[v] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

thì phép nhân với ma trận  $A$  tạo ra ánh xạ tuyến tính xác định bởi

$$[T(v)] = A[v] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Về mặt hình học (hình 51) ta sẽ chứng minh rằng vectơ  $v'$  là kết quả của phép quay  $v$  một góc  $\alpha$  quanh gốc tọa độ, sẽ trùng với  $T(v)$ . Thật vậy, giả sử  $\phi$  là góc giữa  $v$  và trục  $x$  dương và giả sử  $v' = (x', y')$  tức là

$$[v'] = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$



Hình 51

Gọi  $r$  là độ dài của  $v$  và của  $v'$ .

Ta có

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

$$x' = r \cos(\alpha + \phi), \quad y' = r \sin(\alpha + \phi).$$

Do đó

$$\begin{aligned} [v'] &= \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha + \phi) \\ r \sin(\alpha + \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \alpha \cos \phi - r \sin \alpha \sin \phi \\ r \sin \alpha \cos \phi + r \cos \alpha \sin \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{bmatrix} = [T(v)]. \end{aligned}$$

Vậy  $v' = T(v)$ .

Ánh xạ tuyến tính ở thí dụ này là phép quay trong  $\mathbf{R}^2$  một góc  $\alpha$ .

*Thí dụ 6.1.4.* Giả sử  $V$  và  $W$  là hai không gian vectơ. Ánh xạ  $T: V \rightarrow W$  xác định bởi

$$T(v) = \theta, \quad \forall v \in V$$

là một ánh xạ tuyến tính.

Thật vậy,  $\forall u, v \in V, \forall k \in \mathbf{R}$ , ta có

$$T(u) = \theta, \quad T(v) = \theta, \quad T(u + v) = \theta, \quad T(ku) = \theta,$$

Do đó  $T(u + v) = T(u) + T(v)$

$$T(ku) = kT(u).$$

Ta gọi ánh xạ ở thí dụ này là *ánh xạ không*.

*Thí dụ 6.1.5.*  $V$  là một không gian vectơ. Ánh xạ  $T : V \rightarrow V$  xác định bởi

$$T(v) = v, \quad \forall v \in V$$

là một ánh xạ tuyến tính (bạn đọc kiểm tra).

Ta gọi ánh xạ này là *ánh xạ đồng nhất*.

*Thí dụ 6.1.6.*  $V$  là một không gian vectơ và  $k \in \mathbf{R}$ . Ánh xạ  $T : V \rightarrow V$  xác định bởi.

$$T(v) = kv, \quad k > 0, \quad \forall v \in V$$

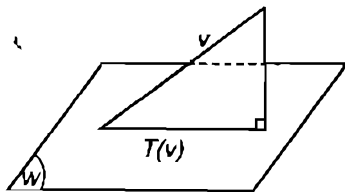
là một toán tử tuyến tính trên  $V$  (bạn đọc kiểm tra).

Nếu  $k > 1$ ,  $T$  là một *phép dãn*; nếu  $0 < k < 1$ ,  $T$  là một *phép co*.

*Thí dụ 6.1.7.* Giả sử  $V$  là một không gian có tích vô hướng,  $W$  là một không gian con hữu hạn chiều của  $V$ ,  $W$  có cơ sở trực chuẩn là

$$B = (w_1, w_2, \dots, w_r).$$

Giả sử  $T : V \rightarrow W$  là ánh xạ chiếu mỗi vectơ  $v \in V$  thành hình chiếu trực giao của nó lên  $W$ , nghĩa là



Hình 52

$$T(v) = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle v, w_r \rangle w_r$$

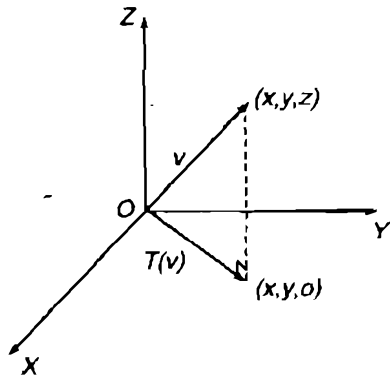
Ánh xạ  $T$  gọi là *phép chiếu trực giao của  $V$  lên  $W$*  (hình 52). Nó là một ánh xạ tuyến tính vì

$$\begin{aligned} T(u + v) &= \langle u + v, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle u + v, w_r \rangle w_r \\ &= \langle u, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle u, w_r \rangle w_r + \\ &\quad + \langle v, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle v, w_r \rangle w_r \\ &= T(u) + T(v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(ku) &= \langle ku, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle ku, w_r \rangle w_r \\
&= k \langle u, w_1 \rangle w_1 + \dots + k \langle u, w_r \rangle w_r \\
&= k (\langle u, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle u, w_r \rangle w_r) \\
&= kT(u)
\end{aligned}$$

*Thí dụ 6.1.8.* Một trường hợp riêng của thí dụ trên là trường hợp sau :  $V = \mathbf{R}^3$  với tích vô hướng Euclid. Những vectơ  $w_1 = (1, 0, 0)$  và  $w_2 = (0, 1, 0)$  tạo thành một cơ sở trực giao của mặt phẳng  $Oxy$  (bạn đọc kiểm tra lại). Vậy nếu  $v = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$  thì hình chiếu trực giao của  $v$  lên mặt phẳng  $Oxy$  cho bởi

$$\begin{aligned}
T(v) &= \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 \\
&= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \\
&= (x, y, 0)
\end{aligned}$$



Hình 53

(xem hình 53).

*Thí dụ 6.1.9.* Giả sử  $V$  là không gian vectơ  $n$  chiều, và  $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  là một cơ sở của  $V$ . Thế thì mỗi  $v \in V$  có biểu diễn duy nhất

$$v = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n,$$

nghĩa là có

$$(v)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Xét ánh xạ  $T : V \rightarrow \mathbf{R}^n$  xác định bởi

$$T(v) = (v)_S$$

Ta sẽ chứng minh  $T$  là ánh xạ tuyến tính.

Thật vậy, với  $u \in V$  nữa ta có

$$u = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_n w_n,$$

nghĩa là có

$$(u)_S = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Do đó

$$\begin{aligned} (u + v)_S &= (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n) \\ &= (b_1, b_2, \dots, b_n) + (c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &= (u)_S + (v)_S ; \\ (ku)_S &= (kb_1, kb_2, \dots, kb_n) \\ &= k(b_1, b_2, \dots, b_n) \\ &= k(u)_S. \end{aligned}$$

Một cách tương tự, ánh xạ  $T : V \rightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}$  xác định bởi

$$[T(v)] = [v]_S$$

cũng là một ánh xạ tuyến tính.

*Thí dụ 6.1.10.*  $V$  là một không gian có tích vô hướng và  $v_o$  là một véctơ cố định của  $V$ . Giả sử  $T : V \rightarrow \mathbf{R}$  là một ánh xạ xác định bởi

$$T(v) = \langle u, v_o \rangle.$$

Theo tính chất của tích vô hướng ta có

$$\begin{aligned} T(u + v) &= \langle u + v, v_o \rangle = \langle u, v_o \rangle + \langle v, v_o \rangle \\ &= T(u) + T(v) ; \\ T(ku) &= \langle ku, v_o \rangle = k \langle u, v_o \rangle \\ &= kT(u). \end{aligned}$$

Vậy  $T$  là một ánh xạ tuyến tính.

*Thí dụ 6.1.11.* Giả sử  $V = C[0, 1]$  và  $W$  là không gian con của  $C[0, 1]$  gồm tất cả những hàm số có đạo hàm liên tục trên  $0 \leq t \leq 1$ .

Giả sử  $D : W \rightarrow V$  là ánh xạ xác định bởi

$$D(f) = f'$$

Theo tính chất của đạo hàm ta có

$$\begin{aligned}D(f + g) &= (f + g)' = f' + g' \\ &= D(f) + D(g) \\ D(kf) &= (kf)' = kf' \\ &= kD(f).\end{aligned}$$

Vậy  $D$  là một ánh xạ tuyến tính.

*Thí dụ 6.1.12.* Giả sử  $V = C[0, 1]$  và  $J : V \rightarrow \mathbf{R}$  là ánh xạ xác định

$$\text{bởi } J(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Để thấy, theo tính chất của tích phân :

$$\begin{aligned}J(f + g) &= \int_0^1 [f(t) + g(t)]dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt \\ &= J(f) + J(g) ; \\ J(kf) &= \int_0^1 kf(t)dt = k \int_0^1 f(t)dt ..\end{aligned}$$

Vậy  $J$  là một ánh xạ tuyến tính.

#### 6.1.4. Các phép toán về ánh xạ tuyến tính

1) Giả sử  $V$  và  $W$  là hai không gian vectơ và

$$f : V \rightarrow W \quad \text{và} \quad g : V \rightarrow W$$

là hai ánh xạ tuyến tính từ  $V$  tới  $W$ .

Ta định nghĩa tổng  $f + g$  của hai ánh xạ tuyến tính và tích  $kf$  của một ánh xạ tuyến tính với một số thực  $k$  như sau :

$$\forall u \in V, (f + g)(u) := f(u) + g(u) \in W$$

$$\forall u \in V, (kf)(u) := kf(u) \in W.$$

Để thấy rằng  $f + g$  và  $kf$  cũng là những ánh xạ tuyến tính từ  $V$  tới  $W$  (bạn đọc kiểm tra lại).

Bây giờ, gọi  $\mathcal{L}(V, W)$  là tập tất cả những ánh xạ tuyến tính từ  $V$  tới  $W$  :  $\mathcal{L}(V, W) := \{f \mid f: V \rightarrow W, f \text{ tuyến tính}\}$ .

Với hai phép toán cộng ánh xạ tuyến tính và nhân ánh xạ tuyến tính với một số thực vừa định nghĩa, có thể chứng minh được rằng  $\mathcal{L}(V, W)$  là một không gian vectơ trên trường số thực.

2) Bây giờ giả sử  $V, W, U$  là ba không gian vectơ và

$$f: V \rightarrow W, g: W \rightarrow U$$

là hai ánh xạ tuyến tính.

Khi đó ánh xạ hợp  $g \circ f$  (xem 1.5.8) xác định bởi  $\forall v \in V$   $(g \circ f)(v) = g(f(v)) \in U$  là một ánh xạ tuyến tính từ  $V$  tới  $U$ .

### 6.1.5. Sự đẳng cấu của không gian $n$ chiều với $\mathbf{R}^n$

**Định nghĩa 6.1.2.** Hai không gian vectơ  $V$  và  $V'$  gọi là đẳng cấu nếu giữa các vectơ  $x \in V$  và các vectơ  $x' \in V'$  có một tương ứng 1-1

$$x \leftrightarrow x'$$

sao cho, nếu  $x \leftrightarrow x'$  và  $y \leftrightarrow y'$  thì

$$x + y \leftrightarrow x' + y'$$

$$kx \leftrightarrow kx', k \in \mathbf{R}.$$

Hai không gian đẳng cấu có những tính chất giống nhau.

Dựa vào các kết quả ở thí dụ 6.1.9 ta suy ra định lí sau :

**Định lí 6.1.1.** Mọi không gian  $n$  chiều  $V$  đều đẳng cấu với  $\mathbf{R}^n$ .

*Chứng minh :* Xét ánh xạ  $T: V \rightarrow \mathbf{R}^n$  xác định bởi

$$v \in V \mapsto T(v) = (v)_S \in \mathbf{R}^n,$$

trong đó  $S$  là một cơ sở của  $V$ .



Theo thí dụ 6.1.9 thì ánh xạ  $T$  là tuyến tính và tạo ra một tương ứng 1-1 giữa  $V$  và  $\mathbf{R}^n$  nghĩa là

$$x \in V \leftrightarrow (x)_S \in \mathbf{R}^n.$$

Đồng thời với

$$x \in V \leftrightarrow (x)_S \in \mathbf{R}^n$$

$$y \in V \leftrightarrow (y)_S \in \mathbf{R}^n$$

ta có

$$x + y \in V \leftrightarrow (x + y)_S = (x)_S + (y)_S \in \mathbf{R}^n$$

$$kx \in V \leftrightarrow (kx)_S = k(x)_S \in \mathbf{R}^n.$$

Vậy  $V$  đẳng cấu với  $\mathbf{R}^n$ .

*Chú ý 6.1.3.* Khái niệm đẳng cấu của hai không gian hữu hạn chiều nói trên có thể suy cho cả các không gian vectơ bất kì. Cụ thể hơn, ta xét hai không gian vectơ  $V$  và  $W$  và giả sử tồn tại một ánh xạ tuyến tính  $T$  từ  $V$  sang  $W$

$$T : V \rightarrow W.$$

Khi đó ta nói  $T$  là một phép *đồng cấu* của  $V$  trên  $W$ . Nếu ngoài ra  $W$  lại trùng với  $V$  thì ta nói  $T$  là một phép *tự đồng cấu* của  $V$ .

Nếu  $T$  là một song ánh từ  $V$  lên  $W$  thì ta nói  $T$  là một phép *đẳng cấu* của  $V$  trên  $W$ . Nếu ngoài ra  $W$  lại trùng với  $V$  thì ta nói  $T$  là một phép *tự đẳng cấu* của  $V$ .

Khi tồn tại một phép đẳng cấu của  $V$  lên  $W$  ta nói  $V$  *đẳng cấu với*  $W$ ,  $W$  *đẳng cấu với*  $V$ ,  $V$  và  $W$  *đẳng cấu với nhau*.

Người ta thường đồng nhất hai không gian đẳng cấu với nhau, tức là xem hai không gian đó như là một.

BÀI TẬP : 6.1 – 6.9.

## 6.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH – HẠT NHÂN VÀ ẢNH

### 6.2.1. Tính chất đầu tiên

**Định lí 6.2.1.** *V và W là hai không gian vectơ.*

*Nếu  $T : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính thì*

(a)  $T(\theta) = \theta$

(b)  $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$

(c)  $T(v - w) = T(v) - T(w), \forall v, w \in V$

*Chứng minh :* (a) Giả sử  $v \in V$ . Vì  $0v = \theta$  (xem định lí 5.1.1 phần (c)), nên  $T(\theta) = T(0v) = 0T(v) = \theta$ .

(b) Bây giờ, vì  $-v = (-1)v$  (xem định lí 5.1.1 phần (d)), nên

$$T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v).$$

(c) Vì  $v - w = v + (-w)$  (xem chú ý 5.1.8) nên  $v - w = v + (-1)w$ , do đó

$$T(v - w) = T(v + (-1)w) = T(v) + T((-1)w) = T(v) - T(w).$$

### 6.2.2. Khái niệm hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

**Định nghĩa 6.2.1.** *Giả sử V và W là hai không gian vectơ và  $T : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính.*

*Khi đó tập tất cả các phần tử của V có ảnh là  $\theta \in W$  gọi là hạt nhân của T, kí hiệu là  $\text{Ker}(T)$  :*

$$\text{Ker}(T) := \{x \mid x \in V, T(x) = \theta\}$$

*Tập tất cả các phần tử của W là ảnh của ít nhất một phần tử của V gọi là ảnh của T, kí hiệu là  $\text{Im}(T)$  :*

$$\text{Im}(T) := \{y \mid y \in W, \exists x \in V, T(x) = y\}.$$

Như vậy

$$\text{Im}(T) = T(V).$$

Bạn đọc có thể tham khảo định nghĩa 1.5.2.

*Thí dụ 6.2.1.* Giả sử  $T : V \rightarrow W$  là ánh xạ không.

Khi đó (xem thí dụ 6.1.4) ta có

$$\forall v \in V, T(v) = 0 \in W. \text{ Vậy}$$

$$\text{Ker}(T) = V.$$

Vì  $\theta$  là ảnh duy nhất của mọi  $v \in V$  nên

$$\text{Im}(T) = \{\theta\}.$$

*Thí dụ 6.2.2.* Giả sử  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  là ánh xạ nhân với ma trận thuộc  $M_{m \times n}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nhân của  $T$  gồm tất cả các vectơ  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  sao cho ma

trận  $[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$  là nghiệm của hệ thuần nhất  $A[x] = \theta$ .

Ảnh của  $T$  gồm những vectơ  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$  sao cho hệ

$$A[x] = [y], [y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}$$

tương thích (nghĩa là có nghiệm).

### 6.2.3. Tính chất của nhân và ảnh

**Định lý 6.2.2.** Nếu  $T : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính thì

(a)  $\text{Ker}(T)$  là một không gian con của  $V$ .

(b)  $\text{Im}(T)$  là một không gian con của  $W$ .

*Chứng minh :* (a) Để chứng minh  $\text{Ker}(T)$  là một không gian con của  $V$  ta phải chứng minh nó đóng kín đối với phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với một số trong  $V$  (định lý 5.2.1).

Giả sử  $v_1, v_2 \in \text{Ker}(T)$  và  $k \in \mathbf{R}$ . Ta có

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = \theta + \theta = \theta$$

Vậy  $v_1 + v_2 \in \text{Ker}(T)$ .

Bây giờ

$$T(kv_1) = kT(v_1) = k\theta = \theta.$$

Vậy  $kv_1 \in \text{Ker}(T)$ . Xong phần (a).

(b) Giả sử  $w_1$  và  $w_2 \in \text{Im}(T)$  ta phải chứng minh  $w_1 + w_2 \in \text{Im}(T)$  và  $kw_1 \in \text{Im}(T)$  với mọi  $k \in \mathbf{R}$ . Muốn thế ta phải tìm được  $a$  và  $b \in V$  sao cho

$$T(a) = w_1 + w_2 \text{ và } T(b) = kw_1.$$

Vì  $w_1$  và  $w_2 \in \text{Im}(T)$  nên tồn tại những vectơ  $a_1$  và  $a_2 \in V$  sao cho  $T(a_1) = w_1$  và  $T(a_2) = w_2$ . Đặt  $a = a_1 + a_2$  và  $b = ka_1$  thì

$$T(a) = T(a_1 + a_2) = T(a_1) + T(a_2) = w_1 + w_2$$

$$T(b) = T(ka_1) = kT(a_1) = kw_1.$$

Vậy xong phần (b).

*Thí dụ 6.2.3.* Giả sử  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  là ánh xạ nhân với ma trận cỡ  $m \times n$ . Vì  $\text{Ker}(T)$  gồm những nghiệm của phương trình  $Ax = \theta$  nên  $\text{Ker}(T)$  là không gian nghiệm của hệ đó.

Mặt khác  $\text{Im}(T)$  gồm những vectơ  $b$  sao cho tồn tại  $x$  để  $Ax = b$  thoả mãn. Vậy  $\text{Im}(T)$  là không gian cột của ma trận  $A$  (tức là không gian sinh bởi các vectơ cột của  $A$ ).

### 6.2.4. Hạng của ánh xạ tuyến tính – Định lý về số chiều

**1. Định nghĩa 6.2.2.** Nếu  $T : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính thì số chiều của  $\text{Im}(T)$  gọi là hạng của  $T$ , kí hiệu là  $\text{rank}(T)$  :

$$\text{rank}(T) := \dim(\text{Im}(T))$$

*Thí dụ 6.2.4.* Giả sử  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  là phép quay của  $\mathbf{R}^2$  một góc  $\pi/4$ . Về mặt hình học ta thấy ngay rằng

$$\text{Im}(T) = \mathbf{R}^2 \text{ và } \text{Ker}(T) = \{\theta\}.$$

Vậy  $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$  và

$$\text{rank}(T) = (\dim(\text{Im}(T))) = 2$$

*Thí dụ 6.2.5.* Giả sử  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  là ánh xạ nhân với ma trận cỡ  $m \times n$ . Ở thí dụ 6.2.3 ta đã thấy rằng  $\text{Im}(T)$  bằng không gian cột của  $A$ , vậy hạng của  $T$  bằng số chiều của không gian cột của  $A$ , tức chính là hạng của  $A$  (chú ý 5.5.2).

Tóm lại

$$\text{rank}(T) = \rho(A)$$

Ở thí dụ 6.2.3 ta cũng thấy rằng  $\text{Ker}(T)$  là không gian nghiệm của phương trình  $Ax = \theta$ . Vậy

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{không gian nghiệm của } Ax = \theta).$$

2. Định lí sau đây cho biết liên hệ giữa  $\text{rank}(T)$  tức là  $\dim(\text{Im}(T))$  với  $\dim(\text{Ker}(T))$  :

**Định lí 6.2.3.** (định lí về số chiều). Nếu  $T : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính từ không gian vectơ  $n$  chiều  $V$  tới không gian vectơ  $W$  thì có

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) = n$$

tức là

$$\text{rank}(T) + \dim(\text{Ker}(T)) = n.$$

*Chứng minh :* Xét trường hợp

$$1 \leq \dim(\text{Ker}(T)) < n,$$

còn các trường hợp  $\text{Ker}(T)$  có số chiều là 0 hay  $n$  xem là bài tập.

Giả sử  $\dim(\text{Ker}(T)) = r$ ,  $0 < r < n$  và

$$S_1 = \{v_1, \dots, v_r\}, T(v_i) = 0, i = 1, \dots, r.$$

là một cơ sở của  $\text{Ker}(T)$ . Vì  $S_1$  độc lập tuyến tính nên theo định lí 5.4.5 có thể thêm vào đó  $n - r$  vectơ  $v_{r+1}, \dots, v_n$  nữa để

$$S_2 = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

tạo thành một cơ sở trong  $V$ .

Để tính  $\dim(\text{Im}(T))$  ta xét họ

$$S_3 = \{T(v_{r+1}), \dots, T(v_n)\}$$

gồm  $n - r$  vectơ  $\in \text{Im}(T)$ .

Ta sẽ chứng minh  $S_3$  sinh ra  $\text{Im}(T)$  và độc lập tuyến tính.

Để chứng minh  $S_3$  sinh ra  $\text{Im}(T)$ , ta xét  $v$  bất kì thuộc  $V$  và tính  $T(v)$ . Vì  $S_2$  là cơ sở trong  $V$  nên

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_r v_r + c_{r+1} v_{r+1} + \dots + c_n v_n.$$

Do đó

$$T(v) = c_1 T(v_1) + \dots + c_r T(v_r) + c_{r+1} T(v_{r+1}) + \dots + c_n T(v_n)$$

$$T(v) = c_{r+1} T(v_{r+1}) + \dots + c_n T(v_n)$$

vì  $v_1, \dots, v_r \in \text{Ker}(T)$ . Vậy  $S_3$  sinh ra  $\text{Im}(T)$ .

Để chứng minh  $S_3$  độc lập tuyến tính ta xét điều kiện (5.3.1)

$$c_{r+1} T(v_{r+1}) + \dots + c_n T(v_n) = \theta \quad (6.2.1)$$

Nó tương đương với

$$T(c_{r+1} v_{r+1} + \dots + c_n v_n) = \theta$$

nghĩa là

$$c_{r+1} v_{r+1} + \dots + c_n v_n \in \text{Ker}(T).$$

Do đó, vì  $S_1$  là cơ sở của  $\text{Ker}(T)$

$$c_{r+1} v_{r+1} + \dots + c_n v_n = c_1 v_1 + \dots + c_r v_r.$$

Ta suy ra

$$c_1 v_1 + \dots + c_r v_r - c_{r+1} v_{r+1} - \dots - c_n v_n = \theta$$

Nhưng  $S_1$  lại là cơ sở của  $V$  nên điều kiện này cho

$$c_i = 0, \forall i$$

Vậy điều kiện (6.2.1) suy ra

$$c_{r+1} = 0, \dots, c_n = 0,$$

nghĩa là  $S_3$  độc lập tuyến tính.

Từ hai kết quả trên, áp dụng định lý 5.4.2 ta suy ra  $\text{Im}(T)$  là không gian  $n - r$  chiều.

Vậy có

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) = (n - r) + r = n$$

Xong chứng minh định lý.

3. Trường hợp đặc biệt khi  $V = \mathbf{R}^n$ ,  $W = \mathbf{R}^m$  và  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  là ánh xạ nhân với ma trận  $A$  cỡ  $m \times n$  thì định lý 6.2.3 về số chiều cho

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(T)) &= n - \text{rank}(T) \\ &= \text{số cột của } A - \text{hạng của } A. \end{aligned}$$

Vậy có

**Định lý 6.2.4.** Nếu  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$  thì số chiều của không gian nghiệm của phương trình  $A[x] = \theta$  bằng  $n$  trừ hạng của  $A$ .

**Thí dụ 6.2.6.** Bạn đọc có thể chứng minh rằng hệ thuần nhất

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 & + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & - x_5 = 0 \\ & x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

có không gian nghiệm là không gian một chiều.

Vì ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

có 5 cột, nên theo định lí 6.2.4 hạng của ma trận  $A$ ,  $\rho(A)$  thoả mãn

$$1 = 5 - \rho(A)$$

Do đó  $\rho(A) = 4$ .

BÀI TẬP : 6.10 – 6.21.

### 6.3. MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

#### 6.3.1. Mở đầu

Ở thí dụ 6.1.2 ta đã thấy rằng mỗi ma trận cỡ  $m \times n$  tạo ra một ánh xạ tuyến tính từ  $\mathbf{R}^n$  tới  $\mathbf{R}^m$ . Nay ta sẽ chứng minh rằng mọi ánh xạ tuyến tính trên các không gian hữu hạn chiều có thể thực hiện bằng một phép nhân ma trận.

#### 6.3.2. Khái niệm ma trận của ánh xạ tuyến tính

Xét hai không gian hữu hạn chiều :  $V$  có  $n$  chiều và  $W$  có  $m$  chiều. Giả sử  $B$  là một cơ sở trong  $V$ ,  $B'$  là một cơ sở trong  $W$  :

$$B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}, B' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

Cho ánh xạ tuyến tính  $T : V \rightarrow W$ . Khi đó

$$x \in V \mapsto T(x) \in W$$

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n, T(x) = y_1 v_1 + \dots + y_m v_m$$



Chuyển qua tọa độ ta có

$$(x)_B = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, (T(x))_{B'} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$$

nghĩa là

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1} \mapsto [T(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 1}$$

Ta muốn tìm ma trận  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$  liên hệ  $[x]_B$  với  $[T(x)]_{B'}$  sao cho

$$A[x]_B = [T(x)]_{B'}, \quad \forall x \in V \quad (6.3.1)$$

để cho  $T(x)$  có thể thực hiện được bằng một phép nhân ma trận.

**Định nghĩa 6.3.1.** Ma trận  $A$  cỡ  $m \times n$  thỏa mãn (6.3.1) nếu có, sẽ được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính  $T: V \rightarrow W$  đối với cơ sở  $B$  trong  $V$  và  $B'$  trong  $W$ .

Để chứng tỏ ma trận  $A$  tồn tại, bây giờ ta tìm cách xây dựng nó. Trước hết ta có một nhận xét.

**Chú ý 6.3.1.** Mọi ánh xạ tuyến tính  $f: V \rightarrow W$  được xác định hoàn toàn bởi  $f(u_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$  (đó là giá trị của  $f$  tại  $u_j$ ).

Thật vậy, với  $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \in V$  thì

$$f(x) = f(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1 f(u_1) + \dots + x_n f(u_n).$$

Bây giờ, vì phép nhân với ma trận là một ánh xạ tuyến tính nên dựa vào chú ý 6.3.1, ta xây dựng ma trận  $A$  bằng cách xác định  $A[u_j]_B$  bởi

$$A[u_j]_B = [T(u_j)]_{B'} \quad j = 1, \dots, n \quad (6.3.2)$$

Vì  $T(u_j) \in W$  nên nó có phân tích trong cơ sở  $B'$

$$T(u_j) = t_{1j} v_1 + t_{2j} v_2 + \dots + t_{mj} v_m \quad (6.3.3)$$

nghĩa là

$$[T(u_j)]_{B'} = \begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{mj} \end{bmatrix}$$

Mặt khác, vì  $u_j$  là vectơ thứ  $j$  của cơ sở  $B$  trong  $V$  nên  $A[u_j]_B$  bằng cột thứ  $j$  của  $A$ . (Bạn đọc có thể kiểm tra lại bằng cách thực hiện phép nhân).

Vậy điều kiện (6.3.2) có nghĩa là

cột thứ  $j$  của  $A$  là

$$[T(u_j)]_{B'} = \begin{bmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{mj} \end{bmatrix}. \quad (6.3.4)$$

Do đó  $A = [[T(u_1)]_{B'}, [T(u_2)]_{B'}, \dots, [T(u_n)]_{B'}]$ ,

$$= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{bmatrix}. \quad (6.3.5)$$

Với ma trận  $A$  đó ta kiểm tra lại điều kiện (6.3.1). Ta có :

$$x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

$$T(x) = T(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_1 T(u_1) + \dots + x_n T(u_n)$$

Do đó  $[T(x)]_{B'} = x_1 [T(u_1)]_{B'} + \dots + x_n [T(u_n)]_{B'}$ ,

$$= x_1 \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{mn} \end{bmatrix}$$

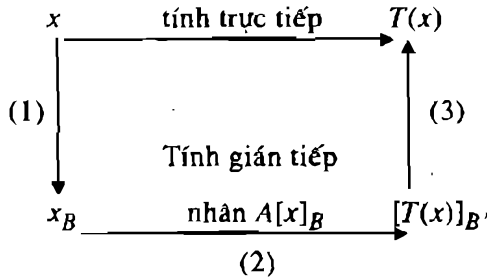
Vế phải đúng bằng  $A[x]_B$ . Vậy ma trận  $A$  xây dựng bởi (6.3.5) là ma trận thoả mãn (6.3.1).

Tóm lại, ta có

**Định lý 6.3.1.** Cho ánh xạ tuyến tính  $T : V \rightarrow W$  từ không gian  $n$  chiều  $V$  tới không gian  $m$  chiều  $W$  thì ma trận của nó đối với cơ sở  $B$  trong  $V$  và cơ sở  $B'$  trong  $W$  là ma trận (6.3.5).

**Chú ý 6.3.2.** Về cách tính ảnh  $T(x)$  của gốc  $x$ .

Ta có sơ đồ



Theo sơ đồ này, khi đã có  $x \in V$  muốn tính  $T(x)$  có hai cách : cách thứ nhất là tính trực tiếp, cách thứ hai là tính gián tiếp qua ba bước :

- (1) Tính ma trận toạ độ  $[x]_B$  của  $x$
- (2) Nhân  $A[x]_B$  để được  $[T(x)]_{B'}$ .
- (3) Tái tạo  $T(x)$  từ ma trận toạ độ  $[T(x)]_{B'}$ .

Có hai lí do cho thấy tầm quan trọng của cách tính gián tiếp. Thứ nhất, nó cung cấp một phương tiện có hiệu quả để tiến hành những ánh xạ tuyến tính trên máy tính điện tử. Lí do thứ hai có tính lí thuyết, nhưng có những hệ quả quan trọng trong thực tiễn.

Ma trận  $A$  phụ thuộc những cơ sở  $B$  và  $B'$ . Thông thường ta chọn  $B$  và  $B'$  sao cho việc tính các ma trận toạ độ càng đơn giản càng tốt. Ta cũng có thể chọn  $B$  và  $B'$  làm cho ma trận  $A$  đơn giản, chẳng hạn sao cho ma trận  $A$  là ma trận thưa. Nếu có thể làm được điều đó thì  $A$  có thể cung cấp những thông tin quan trọng về tính tuyến tính của  $T$ .

### 6.3.3. Trường hợp riêng

1)  $V = \mathbf{R}^n, W = \mathbf{R}^m$ . Xét

$$T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$$

Giả sử  $B$  và  $B'$  là các cơ sở chính tắc trong  $V$  và  $W$  :

$$B = \{e_1, \dots, e_n\}, B' = \{f_1, \dots, f_m\}$$

trong đó các vectơ  $e_i$  và  $f_i$  viết ở dạng cột :

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{hàng } i \quad \quad f_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad \text{hàng } j$$

Khi đó nếu ta viết  $x$  và  $T(x)$  ở dạng cột thì có

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = [x]_B \quad , \quad T(x) = \begin{bmatrix} (T(x))_1 \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \\ (T(x))_m \end{bmatrix} = [T(x)]_{B'}$$

Ma trận  $A$  tương ứng có dạng

$$A = [T(e_1) \dots T(e_n)]$$

trong đó  $T(e_i)$  viết ở dạng cột.

**Định nghĩa 6.3.2.** Ma trận  $A$  này gọi là ma trận chính tắc của  $T$ .

Vì cơ sở chính tắc là duy nhất nên ma trận chính tắc của  $T$  là duy nhất.

2)  $V \cong W$ . Ta thường chọn  $B' = B$ . Ma trận  $A$  tương ứng gọi là ma trận của  $T$  đối với  $B$ . Lúc đó (6.3.1) viết

$$A[x]_B = [T(x)]_B$$

### 6.3.4. Thí dụ

*Thí dụ 6.3.1.* Tìm ma trận chính tắc của ánh xạ  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  xác định bởi (các vectơ viết ở dạng cột)

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

*Giải :* Ta có

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vậy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ T(e_1) & T(e_2) \end{array}$$

Có thể kiểm tra lại :

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

*Thí dụ 6.3.2.* Tìm ma trận chính tắc của ánh xạ  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$  xác định bởi (các vectơ viết ở dạng cột)

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

*Giải :* Ta có

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [1] \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

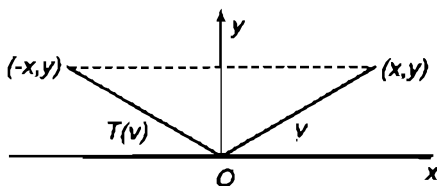
Vậy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Thí dụ 6.3.3.* Giả sử  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  là ánh xạ tuyến tính biến mỗi vectơ  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  thành ảnh đối xứng của nó đối với trục tung (hình 54). Hãy tìm ma trận chính tắc của  $T$  (các vectơ viết ở dạng cột).

Lời giải : Ta có  $T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Hình 54

Vậy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kiểm tra lại :

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

*Thí dụ 6.3.4.* Giả sử  $T : P_1 \rightarrow P_2$  là ánh xạ tuyến tính xác định bởi  $T(p(x)) = xp(x)$ .

Hãy tìm ma trận của  $T$  đối với các cơ sở

$$B = \{u_1, u_2\} \text{ và } B' = \{u'_1, u'_2, u'_3\}$$

trong đó  $u_1 = 1, u_2 = x; u'_1 = 1, u'_2 = x, u'_3 = x^2$ .

*Giải* : Từ công thức về  $T$  ta có

$$T(u_1) = T(1) = (x)(1) = x$$

$$T(u_2) = T(x) = (x)(x) = x^2.$$

Bằng cách kiểm tra lại ta có

$$[T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(u_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy ma trận của  $T$  đối với  $B$  và  $B'$  là

$$A = [[T(u_1)]_{B'} | [T(u_2)]_{B'}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Thí dụ 6.3.5.** Giả sử  $T : P_1 \rightarrow P_2$ ,  $B$  và  $B'$  như ở thí dụ trên, và giả sử

$$T(x) = 1 - 2x.$$

Hãy dùng ma trận  $A$  thu được ở thí dụ trên để tính  $T(x)$  một cách gián tiếp và so sánh với cách tính trực tiếp.

*Giải* : Bằng cách tính gián tiếp ta có

$$[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Do đó } [T(x)]_{B'} = A[x]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } T(x) &= 0u'_1 + 1u'_2 - 2u'_3 = 0(1) + 1(x) - 2(x^2) \\ &= x - 2x^2 \end{aligned}$$

Tính trực tiếp ta có

$$T(x) = T(1 - 2x) = x(1 - 2x) = x - 2x^2.$$

*Thí dụ 6.3.6.* Giả sử  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  là một cơ sở trong không gian vectơ hữu hạn chiều  $V$  và  $I : V \rightarrow V$  là toán tử đồng nhất trên  $V$ . Khi đó

$$I(u_1) = u_1, I(u_2) = u_2, \dots, I(u_n) = u_n$$

Vậy  $[I(u_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [I(u_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, [I(u_n)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

Do đó  $[I]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ .

Vậy ma trận của toán tử đồng nhất đối với bất kì cơ sở nào cũng là ma trận đơn vị cấp  $n$ .

*Thí dụ 6.3.7.* Giả sử  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  là ánh xạ tuyến tính xác định bởi (các vectơ viết ở dạng cột)

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm ma trận của  $T$  đối với cơ sở  $B = \{u_1, u_2\}$  với

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ và } u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



*Giải* : Từ định nghĩa của  $T$  ta có

$$T(u_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2u_1 \text{ và } T(u_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3u_2.$$

Vậy  $[T(u_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $[T(u_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

Do đó ma trận của  $T$  đối với  $B$  là  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

**Chú ý 6.3.2.** Có thể chứng minh được điều ngược lại của định lý 6.3.1, cụ thể là :

Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

bao giờ cũng tồn tại ánh xạ tuyến tính  $T : V \rightarrow W$  xác định bởi

$$[T(u_j)]_B \text{ bằng cột thứ } j \text{ của } A = A[u_j]_B$$

nhận  $A$  làm ma trận đối với cơ sở  $B$  và  $B'$ .

Trường hợp riêng :

$$V = \mathbf{R}^n, W = \mathbf{R}^m$$

$B$  và  $B'$  là các cơ sở chính tắc.

Đó là thí dụ 6.1.2.

### 6.3.5. Ma trận của toán tử tuyến tính trong không gian Euclid

Giả sử  $V$  là không gian Euclid  $n$  chiều với tích vô hướng  $\langle \dots, \rangle$ ,  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $V$  và  $T$  là một toán tử tuyến tính trong  $V$ . Khi đó công thức (6.3.3) cho

$$T(e_j) = t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \dots + t_{nj}e_n.$$

Do đó

$$\langle T(e_j), e_i \rangle = \langle t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \dots + t_{nj}e_n, e_i \rangle = t_{ij}$$

Vậy theo (6.3.4), (6.3.5) toán tử tuyến tính  $T$  có ma trận trong cơ sở  $B$  là

$$A = [t_{ij}] \text{ với } t_{ij} = \langle T(e_j), e_i \rangle = \langle e_i, T(e_j) \rangle. \quad (6.3.6)$$

BÀI TẬP : 6.22 – 6.33.

## 6.4. SỰ ĐỒNG DẠNG

### 6.4.1. Ma trận đồng dạng

**Định nghĩa 6.4.1.** Giả sử  $A$  và  $B$  là hai ma trận vuông cùng cấp  $n$ . Ta nói  $B$  đồng dạng với  $A$ , kí hiệu  $B \sim A$ , nếu tồn tại một ma trận không suy biến (tức là khả đảo)  $P$  cấp  $n$  sao cho

$$B = P^{-1}AP.$$

Chú ý 6.4.1. Đẳng thức  $B = P^{-1}AP$  có thể viết

$$A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}.$$

Đặt  $P^{-1} = Q$  ta có

$$A = Q^{-1}BQ, \quad Q \text{ không suy biến.}$$

Vậy nếu  $B$  đồng dạng với  $A$  thì  $A$  đồng dạng với  $B$ .

### 6.4.2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính thông qua phép đổi cơ sở

**Định lý 6.4.1.** Giả sử  $T : V \rightarrow V$  là một toán tử tuyến tính trong không gian  $n$  chiều  $V$ . Nếu  $A$  là ma trận của  $T$  đối với cơ sở  $B$  và  $A'$  là ma trận của  $T$  đối với cơ sở  $B'$ , thì

$$A' = P^{-1}AP,$$

trong đó  $P$  là ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$ .

Vậy  $A'$  đồng dạng với  $A$ .

*Chứng minh* : Theo giả thiết của định lí ta có,  $\forall x \in V$  :

$$A[x]_{\mathbf{B}} = [T(x)]_{\mathbf{B}} \quad , \quad A'[x]_{\mathbf{B}'} = [T(x)]_{\mathbf{B}'}$$

Vì  $P$  là ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$  nên  $P^{-1}$  là ma trận chuyển cơ sở từ  $B'$  sang  $B$  và có

$$P[x]_{\mathbf{B}'} = [x]_{\mathbf{B}} \quad , \quad P^{-1}[T(x)]_{\mathbf{B}} = [T(x)]_{\mathbf{B}'}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó} \quad A'[x]_{\mathbf{B}'} &= [T(x)]_{\mathbf{B}'} = P^{-1}[T(x)]_{\mathbf{B}} \\ &= P^{-1}A[x]_{\mathbf{B}} = P^{-1}AP[x]_{\mathbf{B}'} \end{aligned}$$

tức là  $A'[x]_{\mathbf{B}'} = P^{-1}AP[x]_{\mathbf{B}'} \quad \forall x \in V$ .

Vậy có  $A' = P^{-1}AP$ .

*Thí dụ 6.4.1.* Giả sử  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  xác định bởi

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm ma trận chính tắc của  $T$ , tức là ma trận của  $T$  đối với cơ sở chính tắc  $B = \{e_1, e_2\}$  :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

rồi dùng định lí 6.4.1 để biến ma trận đó thành ma trận của  $T$  đối với cơ sở  $B' = \{u_1, u_2\}$  :

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

*Giải* : Từ công thức về  $T$  ta có

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Do đó ma trận chính tắc của  $T$  là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Bây giờ ta lập ma trận chuyển cơ sở  $P$  từ  $B$  sang  $B'$ . Ta thấy

$$u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 + 2e_2.$$

$$\text{Do đó } [u_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [u_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Vậy } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ta suy ra } P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do đó theo định lí 6.4.1, ma trận của  $T$  đối với cơ sở  $B'$  là

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Chú ý 6.4.2.* Ma trận  $A'$  có dạng chéo, nó đơn giản hơn  $A$ , và có nhiều tính chất đáng chú ý như

$$(A')^2 = A' \cdot A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}.$$

*Chú ý 6.4.3.* Từ chú ý 6.4.2 ta có thể đặt vấn đề sau : Cho ma trận  $A$  vuông bất kì. Hỏi có thể tìm được ma trận  $P$  vuông cùng cấp để ma trận  $A' = P^{-1}AP$  có dạng đơn giản hơn  $A$ , chẳng hạn như ma trận  $A'$  có dạng chéo, được không ? Đó là vấn đề rút gọn ma trận mà ta sẽ giải quyết một phần ở chương sau thông qua các trị riêng và vectơ riêng của ma trận.

**BÀI TẬP :** 6.34, 6.35

## TÓM TẮT CHƯƠNG VI

### Ánh xạ tuyến tính

$V$  và  $W$  là hai không gian vectơ (trên trường  $\mathbf{R}$ )

$$T : V \rightarrow W.$$

Nói  $T$  là ánh xạ tuyến tính nếu

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V$$

$$T(ku) = kT(u) \quad \forall u \in V, \quad \forall k \in \mathbf{R}.$$

Từ định nghĩa đó suy ra

$$(a) T(\theta) = \theta$$

$$(b) T(-v) = -T(v)$$

$$(c) T(u - v) = T(u) - T(v)$$

### Hạt nhân và ảnh

$$\text{Ker}(T) := \{v \in V \mid T(v) = \theta\}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &:= \{w \in W \mid \exists v \in V, T(v) = w\} \\ &= T(V). \end{aligned}$$

$\text{Ker}(T)$  là một không gian con của  $V$ .

$\text{Im}(T)$  là một không gian con của  $W$ .

Hạng của ánh xạ tuyến tính

$$\text{rank}(T) := \dim(T(V)) = \dim(\text{Im}(T))$$

Nếu  $V$  là không gian  $n$  chiều thì

$$\text{rank}(T) + \dim(\text{Ker}(T)) = n$$

### Ánh xạ tuyến tính và ma trận

$V$  là không gian  $n$  chiều có cơ sở là  $B$

$W$  là không gian  $m$  chiều có cơ sở là  $B'$ .

Cho ma trận  $A$  cỡ  $m \times n$  thì phép nhân  $A$  với vectơ  $x \in V$  tạo ra một ánh xạ tuyến tính từ  $V$  tới  $W$ .

Ngược lại, cho một ánh xạ tuyến tính  $T : V \rightarrow W$  thì tồn tại ma trận  $A$  cỡ  $m \times n$  để ánh xạ  $T$  có thể thực hiện thông qua phép nhân với ma trận  $A$  :

$$A[x]_B = [T(x)]_{B'} \quad x \in V$$

Ma trận  $A$  gọi là *ma trận của ánh xạ  $T$  đối với các cơ sở  $B$  trong  $V$  và  $B'$  trong  $W$* .

Ma trận  $A$  xác định bởi :

cột thứ  $j$  của  $A$  là  $[T(u_j)]_{B'}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$   
 $u_j$  là vectơ thứ  $j$  của cơ sở  $B$ .

Sự đồng dạng của 2 ma trận vuông thuộc  $\mathcal{M}_n$ .

Nói  $A$  đồng dạng với  $B$ , kí hiệu  $A \sim B$ , nếu tồn tại ma trận không suy biến  $P \in \mathcal{M}_n$  để có  $A = P^{-1}BP$ .

Nếu  $A \sim B$  thì  $B \sim A$ .

**Ma trận của ánh xạ tuyến tính qua biến đổi cơ sở**

$V$  là không gian vectơ  $n$  chiều

$T : V \rightarrow V$  là một toán tử tuyến tính trên  $V$

Đối với cơ sở  $B$  của  $V$ ,  $T$  có ma trận  $A$ ,

Đối với cơ sở  $B'$  của  $V$ ,  $T$  có ma trận  $A'$ ,

$P$  là ma trận chuyển cơ sở từ  $B$  sang  $B'$ ,

Khi đó có  $A' = P^{-1}AP$ ,

nghĩa là  $A' \sim A$ .

**BÀI TẬP CHƯƠNG VI**

**6.1.** Ánh xạ  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  dưới đây có phải là tuyến tính không :

- |                        |                         |
|------------------------|-------------------------|
| 1) $f(x, y) = (2x, y)$ | 2) $f(x, y) = (x^2, y)$ |
| 3) $f(x, y) = (y, x)$  | 4) $f(x, y) = (0, y)$   |

$$5) f(x, y) = (x, y + 1)$$

$$6) f(x, y) = (2x + y, x - y)$$

$$7) f(x, y) = (y, y)$$

$$8) f(x, y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y}).$$

**6.2.** Ánh xạ  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  dưới đây có phải là tuyến tính không :

$$1) f(x, y, z) = (x, x + y + z)$$

$$2) f(x, y, z) = (0, 0)$$

$$3) f(x, y, z) = (1, 1)$$

$$4) f(x, y, z) = (2x + y, 3y - 4z)$$

**6.3.** Ánh xạ  $f: \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbf{R}$  dưới đây có phải là tuyến tính không :

$$1) f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$$

$$2) f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$3) f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + 3b + c - d$$

$$4) f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2.$$

**6.4.** Ánh xạ  $f: P_2 \rightarrow P_2$  dưới đây có phải là tuyến tính không :

$$1) f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$$

$$2) f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$$

$$3) f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$$

$$4) f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 1) + a_1x + a_2x^2.$$

**6.5.** Cho  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  là ánh xạ biến mỗi điểm của mặt phẳng thành điểm đối xứng của nó đối với trục  $y$ . Hãy tìm công thức cho  $f$  và chứng tỏ rằng nó là một toán tử tuyến tính trong  $\mathbf{R}^2$ .

**6.6.** Gọi  $\mathcal{M}_m \times_n$  là tập các ma trận cỡ  $m \times n$ . Cho  $B$  là một ma trận cỡ  $2 \times 3$  hoàn toàn xác định. Chứng minh rằng ánh xạ  $T: \mathcal{M}_2 \times_2 \rightarrow \mathcal{M}_2 \times_3$  định nghĩa bởi  $T(A) = AB$  là ánh xạ tuyến tính.

**6.7.** Cho  $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  là một ánh xạ ma trận và giả sử

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(a) Tìm ma trận của  $T$ .

(b) Tìm  $T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

(c) Tìm  $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

**6.8.** Cho ánh xạ  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow W$  là một phép chiếu trực giao các điểm của  $\mathbf{R}^3$  lên mặt phẳng  $xOz$ .

(a) Tìm công thức của  $T$ .

(b) Tìm  $T(2, 7, -1)$ .

**6.9.**  $S$  là một cơ sở trong không gian  $n$  chiều  $V$ .

a) Chứng minh rằng nếu  $v_1, v_2, \dots, v_r$  là một họ độc lập tuyến tính trong  $V$  thì các vectơ tọa độ  $(v_1)_S, (v_2)_S, \dots, (v_r)_S$  cũng tạo thành một họ độc lập tuyến tính trong  $\mathbf{R}^n$  và ngược lại.

b) Nếu  $\{v_1, \dots, v_r\}$  sinh ra  $V$  thì  $\{(v_1)_S, \dots, (v_r)_S\}$  cũng sinh ra  $\mathbf{R}^n$  và ngược lại.

**6.10.** Cho  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  là ánh xạ nhân với ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

1) Hỏi vectơ nào dưới đây thuộc  $\text{Im}(T)$  ?

(a)  $(1, -4)$ ,                      (b)  $(5, 0)$ ,                      (c)  $(-3, 12)$ .

2) Vectơ nào dưới đây thuộc  $\text{Ker}(T)$  ?

(a)  $(5, 10)$ ,                      (b)  $(3, 2)$ ,                      (c)  $(1, 1)$ .

**6.11.** 1) Cho ánh xạ tuyến tính  $T = P_2 \rightarrow P_3$  xác định bởi  $T(p(x)) = xp(x)$ . Hỏi phần tử nào dưới đây thuộc  $\text{Ker}(T)$  :

(a)  $x^2$  ?                      (b)  $0$  ?                      (c)  $1 + x$  ?



2) Hỏi phần tử nào dưới đây thuộc  $\text{Im}(T)$  :

(a)  $x + x^2$  ?

(b)  $1 + x$  ?

(c)  $3 - x^2$  ?

**6.12.**  $V$  là một không gian vectơ, cho  $T : V \rightarrow V$  xác định bởi  $T(v) = 3v$

(a) Tìm  $\text{Ker}(T)$ .

(b) Tìm  $\text{Im}(T)$ .

**6.13.** Tìm số chiều của  $\text{Ker}(T)$  và  $\text{Im}(T)$  với

(a)  $T$  cho ở bài tập 6.10.

(b)  $T$  cho ở bài tập 6.11.

**6.14.**  $V$  là không gian  $n$  chiều. Tìm hạng của ánh xạ tuyến tính  $T : V \rightarrow V$  xác định bởi

(a)  $T(x) = x$  ;

(b)  $T(x) = \theta$  ;

(c)  $T(x) = 3x$ .

**6.15.** Xét cơ sở  $S = \{v_1, v_2, v_3\}$  trong  $\mathbf{R}^3$  trong đó

$$v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 5, 3), v_3 = (1, 0, 10).$$

Tìm biểu diễn ánh xạ tuyến tính  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  xác định bởi  $T(v_1) = (1, 0)$ ,  $T(v_2) = (1, 0)$ ,  $T(v_3) = (0, 1)$ . Tính  $T(1, 1, 1)$ , trong các cơ sở chính tắc của  $\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2$ .

**6.16.** Tìm ánh xạ tuyến tính  $T : P_2 \rightarrow P_2$  xác định bởi  $T(1) = 1 + x$ ,  $T(x) = 3 - x^2$ ,  $T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$ . Tính  $T(2 - 2x + 3x^2)$ .

**6.17.** Tính  $\dim(\text{Ker}(T))$  trong đó

(a)  $T : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^7$  có hạng 3

(b)  $T : P_4 \rightarrow P_3$  có hạng 1

(c)  $\text{Im}$  của  $T : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^3$  là  $\mathbf{R}^3$

(d)  $T : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_2$  có hạng 3.

**6.18.**  $A$  là ma trận cỡ  $5 \times 7$  có hạng bằng 4.

(a) Hãy tìm số chiều của không gian nghiệm của  $Ax = \theta$ .

(b) Hỏi  $Ax = b$  có tương thích với mọi  $b \in \mathbf{R}^5$  không? Lí do.

**6.19.**  $T$  là một ánh xạ ma trận xác định như dưới đây.

Hãy tìm : (a) một cơ sở cho  $\text{Im}(T)$  ;

(b) một cơ sở cho  $\text{Ker}(T)$  ;

(c) số chiều của  $\text{Im}(T)$  và  $\text{Ker}(T)$ .

$$1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

**6.20.** Gọi  $D : P_3 \rightarrow P_2$  là ánh xạ đạo hàm  $D(p) = p'$ . Hãy mô tả  $\text{Ker}(D)$ .

**6.21.** Gọi  $J : P_1 \rightarrow \mathbf{R}$  là ánh xạ tích phân

$$J(p) = \int_{-1}^1 p(x) dx.$$

Hãy mô tả  $\text{Ker}(J)$ .

**6.22.** Hãy tìm ma trận chính tắc (xem định nghĩa 6.3.2) của mỗi toán tử tuyến tính sau :

$$(a) T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$$

$$(b) T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$$(c) T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$$

$$(d) T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$$

**6.23.** Tìm ma trận chính tắc của mỗi ánh xạ tuyến tính sau

$$(a) T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$$

$$(b) T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$$

$$(c) T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(d) T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_2 - x_3)$$

**6.24.** Tìm ma trận chính tắc của toán tử tuyến tính  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  biến  $v = (x, y)$  thành đối xứng của nó đối với

- (a) Trục  $x$ .
- (b) Đường phân giác  $y = x$ .
- (c) Góc toạ độ.

Hãy tính  $T(2, 1)$  trong mỗi trường hợp

**6.25.** Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính  $T : P_2 \rightarrow P_1$  xác định bởi

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$$

đối với các cơ sở chính tắc trong  $P_2$  và  $P_1$ .

**6.26.** Cho  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  xác định bởi

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1, 0)$$

(a) Tìm ma trận của  $T$  đối với các cơ sở  $B = \{u_1, u_2\}$  trong  $\mathbf{R}^2$  và  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$  trong  $\mathbf{R}^3$  :

$$u_1 = (1, 3), u_2 = (-2, 4)$$

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 0), v_3 = (3, 0, 0)$$

(b) Dùng ma trận thu được ở (a) để tính  $T(8, 3)$ .

**6.27.** Cho  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_1 - x_3)$$

(a) Tìm ma trận của  $T$  đối với cơ sở  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 1, 0)$$

(b) Dùng ma trận thu được ở (a) để tính  $T(2, 0, 0)$ .

**6.28.** Cho  $T : P_2 \rightarrow P_4$  là ánh xạ tuyến tính xác định bởi  $T(p)(x) = x^2p(x)$ .

(a) Tìm ma trận của  $T$  đối với các cơ sở  $B = \{p_1, p_2, p_3\}$  trong  $P_2$  và cơ sở chính tắc  $B'$  trong  $P_4$  :

$$p_1 = 1 + x^2, p_2 = 1 + 2x + 3x^2, p_3 = 4 + 5x + x^2$$

(b) Dùng ma trận thu được ở (a) hãy tính  $T(-3 + 5x - 2x^2)$ .

**6.29.** Cho  $v_1 = (1, 3)$ ,  $v_2 = (-1, 4)$  và  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$  là ma trận của

ánh xạ  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  đối với cơ sở  $B = \{v_1, v_2\}$ .

(a) Tìm  $[T(v_1)]_B$  và  $[T(v_2)]_B$ .

(b) Tìm  $T(v_1)$  và  $T(v_2)$ .

(c) Tìm  $T(1, 1)$ .

**6.30.** Cho  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

là ma trận của ánh xạ  $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$  đối với các cơ sở  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  trong  $\mathbf{R}^4$  và  $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$  trong  $\mathbf{R}^3$ :

$v_1 = (0, 1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (2, 1, -1, -1)$ ,  $v_3 = (1, 4, -1, 2)$ ,  $v_4 = (6, 9, 4, 2)$

$w_1 = (0, 8, 8)$ ,  $w_2 = (-7, 8, 1)$ ,  $w_3 = (-6, 9, 1)$ .

(a) Tìm  $[T(v_1)]_{B'}$ ,  $[T(v_2)]_{B'}$ ,  $[T(v_3)]_{B'}$ ,  $[T(v_4)]_{B'}$ .

(b) Tìm  $T(v_1)$ ,  $T(v_2)$ ,  $T(v_3)$ ,  $T(v_4)$ .

(c) Tìm  $T(2, 2, 0, 0)$ .

**6.31.** Cho  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$  là ma trận của ánh xạ

$T : P_2 \rightarrow P_2$  đối với cơ sở  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  với  $v_1 = 3x + 3x^2$ ,  
 $v_2 = -1 + 3x + 2x^2$ ,  $v_3 = 3 + 7x + 2x^2$

(a) Tìm  $[T(v_1)]_B$ ,  $[T(v_2)]_B$ ,  $[T(v_3)]_B$

(b) Tìm  $T(v_1)$ ,  $T(v_2)$ ,  $T(v_3)$ .

(c) Tìm  $T(1 + x^2)$ .

**6.32.** Cho  $D : P_2 \rightarrow P_2$  là toán tử đạo hàm  $D(p) = p'$ .

Tìm ma trận của  $D$  đối với mỗi cơ sở  $B = \{p_1, p_2, p_3\}$  dưới đây :

(a)  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2$ .

(b)  $p_1 = 2, p_2 = 2 - 3x, p_3 = 2 - 3x + 8x^2$ .

(c) Dùng ma trận thu được ở (a) để tính  $D(6 - 6x + 24x^2)$ .

(d) Làm lại phần (c) đối với ma trận ở (b).

**6.33.** Trong các bài tập dưới đây hãy tìm ma trận của  $T$  đối với cơ sở  $B$  rồi suy ra ma trận của  $T$  đối với cơ sở  $B'$ .

1)  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  xác định bởi

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -x_2)$$

$$B = \{u_1, u_2\}, B' = \{v_1, v_2\}$$

$$u_1 = (1, 0), u_2 = (0, 1), v_1 = (2, 1), v_2 = (-3, 4)$$

2)  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  xác định bởi

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 7x_2, 3x_1 - 4x_2)$$

$$B = \{u_1, u_2\}, B' = \{v_1, v_2\}$$

$$u_1 = (2, 3), u_2 = (4, -1), v_1 = (1, 3), v_2 = (-1, -1)$$

3)  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2, x_1 + 7x_3)$$

$B$  là cơ sở chuẩn tắc trong  $\mathbf{R}^3$ ,  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

$$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)$$

4)  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  là phép chiếu trực giao lên mặt phẳng  $xOy$ ,  $B$  và  $B'$  cho ở bài tập 3).

5)  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  xác định bởi  $T(x) = 5x$ ,  $B$  và  $B'$  cho ở bài tập 2).

6)  $T : P_1 \rightarrow P_1$  xác định bởi

$$T(a_0 + a_1x) = a_0 + a_1(x + 1)$$

$$B = \{p_1, p_2\}, B' = \{q_1, q_2\}$$

$$p_1 = 6 + 3x, p_2 = 10 + 2x$$

$$q_1 = 2, q_2 = 3 + 2x$$

**6.34.** Chứng minh rằng nếu  $A$  và  $B$  đồng dạng thì  $A^2$  và  $B^2$  đồng dạng.

**6.35.** Chứng minh rằng hai ma trận đồng dạng có cùng hạng.

108.11

### ĐÁP SỐ

- 6.1. 1) có ;            2) không ;            3) có ;            4) có  
           5) không ;        6) có ;                7) có ;            8) không.

- 6.2. 1) có ;            2) có ;                3) không ;        4) có.

- 6.3. 1) có ;            2) không ;            3) có ;            4) không.

- 6.4. 1) có ;            2) có ;                3) có ;            4) không.

6.5.  $f(x, y) = (-x, y)$ .

6.7. a)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ;            b)  $\begin{bmatrix} 42 \\ -55 \end{bmatrix}$ ;            c)  $\begin{bmatrix} x + 3y + 4z \\ x - 7z \end{bmatrix}$ .

6.8. a)  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$             b)  $(2, 7, 0)$ .

- 6.10. 1) a) c)

2) a).

- 6.11. 1) b) ;

2) a).

6.12. a)  $\text{Ker}(T) = \{\theta\}$  ; b)  $\text{Im}(T) = V$ .

6.13. a)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$  ;  $\dim(\text{Im}(T)) = 1$  ;

b)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$  ;  $\dim(\text{Im}(T)) = 3$ .

6.14. a)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$  ;  $\dim(\text{Im}(T)) = n$  ;

b)  $\dim(\text{Ker}(T)) = n$  ;  $\dim(\text{Im}(T)) = 0$  ;

c)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$  ;  $\dim(\text{Im}(T)) = n$ .

6.15.  $T(x, y, z) = (30x - 10y - 3z, -9x + 3y + z)$ ,

$T(1, 1, 1) = (17, -5)$ .

6.16.  $T(2 - 2x + 3x^2) = 8 + 8x - 7x^2$ .

6.17. a)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$  ;            b)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 4$  ;

c)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$  ;            d)  $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$ .

6.18. a) số chiều =  $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$  ;

b) Không. Muốn cho  $Ax = b$  tương thích  $\forall b \in \mathbf{R}^5$ , phải có  $\text{Im}(T) = \mathbf{R}^5$ , nhưng vì  $\text{rank}(T) = 4$  nên  $\dim(\text{Im}(T)) = 4 \neq 5$  nên  $\text{Im}(T) \neq \mathbf{R}^5$ .

6.19. 1) a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -14/11 \\ 19/11 \\ 1 \end{bmatrix}$

c)  $\text{rank}(T) = 2, \dim(\text{Ker}(T)) = 1$

2) a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c)  $\text{rank}(T) = 1, \dim(\text{Ker}(T)) = 2$

3) a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/7 \\ 2/7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

c)  $\text{rank}(T) = 2, \dim(\text{Ker}(T)) = 2$

4) a)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2/7 \\ 5/14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

c)  $\text{rank}(T) = 3, \dim(\text{Ker}(T)) = 2$

6.20.  $\text{Ker}(D)$  gồm các đa thức hằng.

6.21.  $\text{Ker}(J)$  gồm các đa thức có dạng  $kx$ .

6.22. a)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

6.23. a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- c) 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- 6.24. a) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
- c) 
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
- 6.25. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$
- 6.26. a) 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/2 & 1 \\ 8/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$
- b) 
$$\begin{bmatrix} 14 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$
- 6.27. a) 
$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$
- b) 
$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
- 6.28. a) 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
- b) 
$$-3x^2 + 5x^3 - 2x^4$$
- 6.29. a) 
$$\{T(v_1)\}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \{T(v_2)\}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$
- b) 
$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, T(v_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 29 \end{bmatrix}$$
- c) 
$$\begin{bmatrix} 19/7 \\ -83/7 \end{bmatrix}$$
- d) 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
- b) 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
- $$T((2,1)) = (2,-1);$$
- d) 
$$T((2,1)) = (1,2);$$
- $$T((2,1)) = (-2,-1).$$



$$6.30. \text{ a) } [T(v_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, [T(v_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(v_3)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, [T(v_4)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } T(v_1) = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{bmatrix}, T(v_2) = \begin{bmatrix} -42 \\ 32 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$T(v_3) = \begin{bmatrix} -56 \\ 87 \\ 17 \end{bmatrix}, T(v_4) = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} -31 \\ 37 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$6.31. \text{ a) } [T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$[T(v_3)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } T(v_1) = 16 + 51x + 19x^2$$

$$T(v_2) = -6 - 5x + 5x^2$$

$$T(v_3) = 7 + 40x + 15x^2$$

$$\text{c) } T(1 + x^2) = 22 + 56x + 14x^2$$

6.32. a)  $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 0 & -3/2 & 23/6 \\ 0 & 0 & -16/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c)  $-6 + 48x$

d)  $-6 + 48x.$

6.33. 1)  $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$

$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} -3/11 & -56/11 \\ -2/11 & 3/11 \end{bmatrix}$

2)  $[T]_B = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -1 & 61 \\ 81 & -41 \end{bmatrix},$

$[T]_{B'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -31 & 9 \\ -75 & 25 \end{bmatrix}$

3)  $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix},$

$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

4)  $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5)  $[T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$

$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

6)  $[T]_B = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix},$

$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

## Chương VII

# TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG CỦA TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

### 7.1. TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG CỦA MA TRẬN

#### 7.1.1. Mở đầu

Trong nhiều bài toán, khi cho toán tử tuyến tính  $T : V \rightarrow V$  thì có một vấn đề quan trọng là xác định được những số  $\lambda$  sao cho  $T(x) = \lambda x$ , tức là  $T(x)$  tỉ lệ với  $x$ ,  $x \neq 0$ . Ta sẽ nghiên cứu vấn đề này và nêu lên một vài ứng dụng.

#### 7.1.2. Khái niệm trị riêng và vectơ riêng của ma trận

**Định nghĩa 7.1.1.** Giả sử  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$ . Số  $\lambda$  gọi là trị riêng của  $A$  nếu phương trình

$$Ax = \lambda x, x \in \mathbf{R}^n$$

có nghiệm  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ .

Vectơ  $x \neq \theta$  này gọi là vectơ riêng ứng trị riêng  $\lambda$ .

*Thí dụ 7.1.1.* Cho  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Ta thấy  $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Vậy với  $x = (1, 2)$  ta có

$$Ax = 3x$$

nghĩa là 3 là trị riêng của  $A$  với vectơ riêng là  $(1, 2) \in \mathbf{R}^2$ .

*Chú ý 7.1.1.* Nếu  $x$  là vectơ riêng của  $A$  ứng trị riêng  $\lambda$  thì  $cx$ , trong đó  $c$  là một hằng số khác không tùy ý, cũng là vectơ riêng của  $A$  ứng trị riêng  $\lambda$ .

Thật vậy, ta có

$$A(cx) = cAx = c\lambda x = \lambda(cx).$$

Vì vậy sau khi có  $x$  ta có thể chọn  $c$  để được vectơ riêng có độ dài bằng 1, nghĩa là

$$\|cx\| = 1 \Rightarrow c = 1/\|x\|.$$

Vectơ riêng có độ dài bằng 1 gọi là vectơ riêng đã chuẩn hoá.

### 7.1.3. Phương trình đặc trưng

Để tìm các trị riêng của ma trận vuông  $A$  cấp  $n$ , ta viết  $Ax = \lambda x$  thành  $Ax = \lambda Ix$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ , trong đó  $I$  là ma trận đơn vị cấp  $n$ . Do đó có

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Đây là một hệ tuyến tính thuần nhất. Muốn cho  $\lambda$  là trị riêng của  $A$ , điều kiện là hệ trên có nghiệm  $x \neq \theta$  và muốn thế điều kiện cần và đủ là

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{7.1.1}$$

Đó là phương trình để xác định các trị riêng của  $A$ , ta đi đến định nghĩa sau

**Định nghĩa 7.1.2.** Phương trình (7.1.1) gọi là phương trình đặc trưng của ma trận vuông  $A$ , còn đa thức  $\det(A - \lambda I)$  gọi là đa thức đặc trưng của  $A$ .

*Thí dụ 7.1.2.* Hãy tìm các trị riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Giải :* Ta có

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình đặc trưng của  $A$  là

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Ta suy ra  $\lambda = 1$  và  $\lambda = 2$  là các trị riêng của  $A$ .

**Thí dụ 7.1.3.** Tìm các trị riêng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

**Giải :** Phương trình đặc trưng của  $A$  viết

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -1 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Phương trình này không có nghiệm thực, chỉ có hai nghiệm phức là  $i$  và  $-i$ . Vậy ma trận  $A$  không có trị riêng thực, nhưng có hai trị riêng phức là  $i$  và  $-i$ .

**Chú ý 7.1.2.** Phương trình đặc trưng (7.1.1) của ma trận  $A$  cấp  $n$  là phương trình bậc  $n$  đối với  $\lambda$ . Theo đại số học (định lí 2.6.3) nó có  $n$  nghiệm thực hoặc phức, đơn hoặc bội. Vậy một ma trận cấp  $n$  có  $n$  trị riêng, thực hoặc phức, đơn hoặc bội.

**Chú ý 7.1.3.** Số bội của nghiệm  $\lambda$  của phương trình đặc trưng (7.1.1) gọi là số bội đại số của  $\lambda$ .

### 7.1.4. Trị riêng của ma trận đồng dạng

**Định lí 7.1.1.** Hai ma trận đồng dạng có cùng một đa thức đặc trưng, nghĩa là có các trị riêng như nhau.

**Chứng minh :** Giả sử  $A$  và  $B$  là hai ma trận đồng dạng, nghĩa là tồn tại ma trận  $P$  không suy biến :  $\det(P) \neq 0$ , để có  $B = P^{-1}AP$ .

Xét phương trình đặc trưng của  $B$  :

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I) \det(P^{-1}) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I) \det(P^{-1}P) \\ &= \det(A - \lambda I) \det(I) \\ &= \det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

vì theo định lí 3.3.5  $\det(P) \det(P^{-1}) = \det(PP^{-1}) = \det(I) = 1$ .

Do đó trị riêng của  $B$  trùng với trị riêng của  $A$ .

### 7.1.5. Tìm vectơ riêng của ma trận

Vectơ riêng của ma trận  $A$  ứng trị riêng  $\lambda$  là nghiệm khác không của phương trình  $Ax = \lambda x$ .

Đó là những vectơ khác không trong không gian nghiệm của phương trình

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (7.1.2)$$

**Định nghĩa 7.1.3.** Ta gọi không gian nghiệm của (7.1.2) là không gian riêng của  $A$  ứng trị riêng  $\lambda$ .

**Chú ý 7.1.4.** Số chiều của không gian riêng của  $A$  ứng trị riêng  $\lambda$  gọi là số bội hình học của  $\lambda$ .

**Thí dụ 7.1.4.** Hãy tìm các cơ sở của không gian riêng của

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

**Giải :** Phương trình đặc trưng của  $A$  là

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-5)^2 = 0$$

nên các trị riêng của  $A$  là  $\lambda = 1$  và  $\lambda = 5$  (bội 2).

Theo định nghĩa, vectơ

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

là vectơ riêng của  $A$  ứng trị riêng  $\lambda$  khi và chỉ khi  $x$  là nghiệm không tầm thường của

$$(A - \lambda I)x = 0$$

nghĩa là

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Với  $\lambda = 5$  ta có

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ này ta được  $x_1 = -s, x_2 = s, x_3 = t$ .

Vậy những vectơ riêng của A ứng trị riêng  $\lambda = 5$  là những vectơ khác không có dạng :

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vì hai vectơ  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  và  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  là độc lập tuyến tính, chúng tạo thành

một cơ sở cho không gian riêng ứng trị riêng  $\lambda = 5$ .

Với  $\lambda = 1$  :

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giải hệ này ta được  $x_1 = t, x_2 = -t, x_3 = 0$ .

Vậy các vectơ riêng ứng trị riêng  $\lambda = 1$  là các vectơ khác không có dạng

$$x = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cho nên  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

là cơ sở của không gian riêng ứng trị riêng  $\lambda = 1$ .

BÀI TẬP : 7.1 – 7.3.

### 7.1.6. Trị riêng của ma trận đối xứng

**Định lí 7.1.2.** *Ma trận đối xứng A chỉ có trị riêng thực.*

*Chứng minh.*

Cho  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ,  $x = [x_i]_{n \times 1}$

– Nhớ rằng nếu  $\alpha \in \mathbb{C}$  thì  $\bar{\alpha}$  kí hiệu số phức liên hợp của  $\alpha$ . Bây giờ ta định nghĩa

$$\bar{A} := [\bar{a}_{ij}]_{n \times n}, \quad \bar{x} := [\bar{x}_i]_{n \times 1}.$$

Khi đó rõ ràng

$$\overline{Ax} = \bar{A}\bar{x} = A\bar{x}.$$

Giả sử  $\lambda$  là trị riêng của A và  $x \neq \theta$  là vectơ riêng tương ứng. Khi đó ta có  $\bar{x}^t x > 0$  và

$$\begin{aligned} \lambda \bar{x}^t x &= \bar{x}^t (\lambda x) = \bar{x}^t (Ax) = (Ax)^t \bar{x} = x^t A^t \bar{x} = \\ &= x^t A \bar{x} = x^t (\bar{A}x) = x^t \bar{\lambda} x = \bar{\lambda} x^t x = \bar{\lambda} \bar{x}^t x \\ \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \bar{x}^t x &= 0 \Rightarrow \lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Do đó vectơ riêng tương ứng là  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Định lí 7.1.3.** *Nếu ma trận A cấp n đối xứng thì nó có n trị riêng thực và n vectơ riêng trực chuẩn tương ứng.*

Xem chứng minh trong phần phụ lục cuối chương, mục 7.5.1.

## 7.2. TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG CỦA TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN HỮU HẠN CHIỀU

### 7.2.1. Đặt bài toán

Ở trên ta đã định nghĩa trị riêng và vectơ riêng cho một ma trận. Ta cũng có thể định nghĩa trị riêng và vectơ riêng cho toán tử tuyến tính.

**Định nghĩa 7.2.1.** *Giả sử V là một không gian vectơ. Số  $\lambda$  gọi là trị riêng của toán tử tuyến tính  $T : V \rightarrow V$  nếu tồn tại vectơ  $x \neq 0$  sao cho  $T(x) = \lambda x$ .*



Vectơ  $x$  được gọi là vectơ riêng ứng trị riêng  $\lambda$ .

Như vậy những vectơ riêng của  $T$  ứng trị riêng  $\lambda$  là những vectơ khác không của  $\text{Ker}(T - \lambda I)$ . Hạt nhân này được gọi là không gian riêng của  $T$  ứng trị riêng  $\lambda$ .

### 7.2.2. Cách giải trong không gian hữu hạn chiều

**Định lí 7.2.1.** Giả sử  $T$  là một toán tử tuyến tính trong không gian vectơ hữu hạn chiều  $V$  và  $A$  là ma trận của  $T$  đối với một cơ sở nào đó  $B$  của  $V$ . Thế thì

- 1) Những trị riêng của  $T$  là những trị riêng của  $A$ .
- 2) Vectơ  $x$  là vectơ riêng của  $T$  ứng trị riêng  $\lambda$  khi và chỉ khi ma trận tọa độ  $[x]_B$  tức là vectơ cột  $[x]_B$  là vectơ riêng của  $A$  ứng trị riêng  $\lambda$ .

*Chứng minh :* Phương trình  $T(x) = \lambda x$  tương đương với

$$[T(x)]_B = \lambda[x]_B$$

Nhưng theo định nghĩa 6.3.1 và công thức (6.3.1) thì

$$[T(x)]_B = A[x]_B$$

Vậy phương trình  $T(x) = \lambda x$  tương đương với

$$A[x]_B = \lambda[x]_B$$

**Chú ý 7.2.1.** Nếu đổi cơ sở thì theo định lí 6.4.1, ma trận  $A'$  của  $T$  đối với cơ sở mới đồng dạng với ma trận  $A$  và do đó theo định lí 7.1.1,  $A'$  có cùng trị riêng như  $A$ .

**Thí dụ 7.2.1.** Hãy tìm các trị riêng và cơ sở trong không gian riêng của toán tử tuyến tính  $T : P_2 \rightarrow P_2$  xác định bởi

$$T(a + bx + cx^2) = (3a - 2b) + (-2a + 3b)x + (5c)x^2.$$

*Giải :* Ma trận của  $T$  đối với cơ sở

$$B = \{1, x, x^2\}$$

là

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Các trị riêng của  $T$  là các trị riêng của  $A$ : đó là  $\lambda = 1$  và  $\lambda = 5$  (Thí dụ 7.1.4). Cũng ở thí dụ 7.1.4 ta đã tìm ra không gian riêng của  $A$  ứng với  $\lambda = 5$  có cơ sở  $\{u_1, u_2\}$ , còn không gian riêng ứng  $\lambda = 1$  có cơ sở  $\{u_3\}$ , trong đó

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Đó là những ma trận toạ độ đối với  $B$  của

$$p_1 = -1 + x, \quad p_2 = x^2, \quad p_3 = 1 + x$$

Vậy  $\{-1 + x, x^2\}$  là một cơ sở trong không gian riêng của  $T$  ứng  $\lambda = 5$ , và  $\{1 + x\}$  là một cơ sở cho không gian riêng ứng  $\lambda = 1$ .

## 7.3. VẤN ĐỀ CHÉO HOÁ MA TRẬN

### 7.3.1. Đặt bài toán

*Bài toán 1a.* Cho  $V$  là một không gian vectơ hữu hạn chiều,  $T : V \rightarrow V$  là một toán tử tuyến tính trong  $V$ . Ta đã biết (xem định nghĩa 6.3.1) rằng ma trận của  $T$  phụ thuộc cơ sở chọn trong  $V$ . Ta mong muốn có một cơ sở sao cho ma trận của  $T$  có dạng đơn giản như dạng chéo chẳng hạn. Hỏi có hay không một cơ sở trong  $V$  sao cho ma trận của  $T$  đối với cơ sở đó là ma trận chéo?

*Bài toán 2a.* Cho  $V$  là một không gian vectơ hữu hạn chiều có tích vô hướng,  $T : V \rightarrow V$  là một toán tử tuyến tính trong  $V$ . Hỏi có hay không một cơ sở trực giao trong  $V$  sao cho ma trận của  $T$  đối với cơ sở đó là ma trận chéo?

### 7.3.2. Cách giải

Giả sử  $A$  là ma trận của  $T$  đối với một cơ sở xác định nào đó trong  $V$ . Ta xét một phép đổi cơ sở. Theo định lí 6.4.1 thì ma trận mới của  $T$  sẽ là  $P^{-1}AP$  trong đó  $P$  là ma trận đổi cơ sở.

Vậy bài toán 1a tương đương với bài toán : Hỏi có tồn tại một phép đổi cơ sở để cho ma trận mới của  $T$  đối với cơ sở mới là ma trận chéo ?

Nếu  $V$  là một không gian có tích vô hướng và những cơ sở là trực chuẩn thì theo định lí 5.8.2,  $P$  sẽ là trực giao.

Vậy ta đã đưa hai bài toán 1a và 2a về những bài toán dạng ma trận :

*Bài toán 1b* (dạng ma trận). Cho một ma trận vuông  $A$ . Hỏi có tồn tại hay không một ma trận  $P$  khả đảo sao cho  $P^{-1}AP$  là ma trận chéo ?

*Bài toán 2b* (dạng ma trận). Cho ma trận vuông  $A$ . Hỏi có tồn tại hay không ma trận trực giao  $P$  sao cho  $P^{-1}AP$  là ma trận chéo ? (ma trận vuông  $A$  gọi là ma trận trực giao nếu  $A'A = I$ ).

### 7.3.3. Ma trận chéo hoá được

**Định nghĩa 7.3.1.** Cho ma trận vuông  $A$ . Nếu tồn tại một ma trận khả đảo  $P$  sao cho  $P^{-1}AP$  là ma trận chéo thì nói ma trận  $A$  chéo hoá được và nói ma trận  $P$  làm chéo hoá ma trận  $A$ .

Như vậy  $A$  chéo hoá được nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo.

Ta phải trả lời hai câu hỏi : 1) ma trận có điều kiện gì thì chéo hoá được và 2) ma trận  $P$  làm chéo hoá ma trận ấy xác định như thế nào ?

### 7.3.4. Giải bài toán chéo hoá ma trận

**Định lí 7.3.1.** Giả sử  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$ . Điều kiện cần và đủ để  $A$  chéo hoá được là nó có  $n$  vectơ riêng độc lập tuyến tính.

*Chứng minh :* a) Giả sử  $A$  chéo hoá được, nghĩa là tồn tại một ma trận khả đảo  $P$  :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

sao cho  $P^{-1}AP = D$ , trong đó

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Ta suy ra  $AP = PD$

Gọi  $p_1, p_2, \dots, p_n$  là các vectơ cột của  $P$ , ta thấy các cột liên tiếp của  $AP$  là  $Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n$ . Đồng thời

$$PD = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \dots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình  $AP = PD$  ở trên cho

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n$$

Vì  $P$  khả đảo nên những vectơ cột  $p_i \neq \theta$ , do đó  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  là các trị riêng của  $A$  và  $p_1, p_2, \dots, p_n$  là các vectơ riêng tương ứng.

Vì  $P$  khả đảo nên  $\det(P) \neq 0$  và các vectơ  $p_1, p_2, \dots, p_n$  là độc lập tuyến tính.

Vậy khi  $A$  chéo hoá được thì nó có  $n$  vectơ riêng độc lập tuyến tính.

*Chứng minh (b).* Giả sử  $A$  có  $n$  vectơ riêng độc lập tuyến tính  $p_1, p_2, \dots, p_n$  với các trị riêng tương ứng  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  và giả sử

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

là ma trận mà các cột là  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Các cột của tích  $AP$  là  $Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n$

Nhưng  $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n$ .

nên  $AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \dots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \dots & \lambda_n p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \dots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = PD,$

0,108,1

trong đó  $D$  là ma trận chéo có những trị riêng trên đường chéo chính. Vì những vectơ cột của  $P$  là độc lập tuyến tính, nên  $P$  khả đảo. Vậy phương trình  $AP = PD$  ở trên viết thành

$$P^{-1}AP = D.$$

Vậy khi  $A$  có  $n$  vectơ riêng độc lập tuyến tính thì  $A$  chéo hoá được. Từ chứng minh của định lí trên ta đi đến :

### 7.3.5. Quy trình chéo hoá một ma trận

*Bước 1.* Tìm  $n$  vectơ riêng độc lập tuyến tính của  $A$  :

$$p_1, p_2, \dots, p_n.$$

*Bước 2.* Lập ma trận  $P$  có  $p_1, p_2, \dots, p_n$  là các cột.

*Bước 3.* Ma trận  $P^{-1}AP$  sẽ là ma trận chéo với  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  là các phần tử chéo liên tiếp, trong đó  $\lambda_i$  là trị riêng ứng  $p_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

*Thí dụ 7.3.1.* Tìm ma trận  $P$  làm chéo hoá ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

*Giải :* Từ thí dụ 7.1.4 các trị riêng của  $A$  là  $\lambda = 5$  và  $\lambda = 1$  đồng thời các vectơ riêng

$$p_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ và } p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ tạo nên cơ sở cho không gian riêng ứng trị}$$

riêng  $\lambda = 5$ , còn

$$p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

là cơ sở cho không gian riêng ứng trị riêng  $\lambda = 1$ . Để kiểm tra để thấy  $\{p_1, p_2, p_3\}$  độc lập tuyến tính, do đó

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

làm chéo hoá  $A$  :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

*Thí dụ 7.3.2.* Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Phương trình đặc trưng của  $A$  là

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0.$$

Vậy  $\lambda = -1$  là trị riêng duy nhất của  $A$ . Vectơ riêng ứng trị riêng  $\lambda = -1$  là nghiệm của  $(A + I)x = 0$  nghĩa là

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Những nghiệm của hệ này là  $x_1 = t, x_2 = t$ . Do đó không gian riêng gồm các vectơ

$$\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vì không gian này là một chiều, nên  $A$  không có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính, do đó không chéo hoá được.

*Thí dụ 7.3.3.* Cho  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  là một toán tử tuyến tính xác định

$$\text{bởi } T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \\ 5x_3 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm một cơ sở trong  $\mathbf{R}^3$  trong đó ma trận của  $T$  là ma trận chéo.

*Giải :* Nếu  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  là cơ sở chính tắc trong  $\mathbf{R}^3$  thì

$$T(e_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

nên ma trận chính tắc của  $T$  là

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Bây giờ ta muốn thay đổi cơ sở từ cơ sở chính tắc  $B$  sang cơ sở mới  $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$  để được một ma trận chéo  $A'$  cho  $T$ .

Nếu gọi  $P$  là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở  $B$  sang cơ sở chưa biết  $B'$  thì theo định lí 6.4.1,  $A$  và  $A'$  có liên hệ

$$A' = P^{-1}AP.$$

Nói cách khác : Ma trận chuyển cơ sở  $P$  làm chéo hoá  $A$ . Ta đã tìm ra  $P$  ở thí dụ 7.3.1. :

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } A' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vì  $P$  là ma trận chuyển cơ sở từ  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  sang  $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$  nên các cột của  $P$  là  $[u_1]_B, [u_2]_B, [u_3]_B$ , cho nên

$$[u_1]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [u_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [u_3]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Vậy } u_1 = (-1)e_1 + (1)e_2 + (0)e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = (0)e_1 + (0)e_2 + (1)e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = (1)e_1 + (1)e_2 + (0)e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

là những vectơ cơ sở tạo nên ma trận chéo  $A'$  của  $T$ .

### 7.3.6. Chéo hoá ma trận có $n$ trị riêng khác nhau

**Định lý 7.3.2.** Nếu ma trận  $A$  cấp  $n$  có  $n$  trị riêng khác nhau thì  $A$  chéo hoá được.

*Chứng minh :* Dựa vào định lý 7.3.1, ta chỉ cần chứng minh rằng ma trận  $A$  có  $n$  vectơ riêng độc lập tuyến tính. Giả sử các trị riêng và vectơ riêng tương ứng của  $A$  là  $\lambda_i$  và  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Đặt  $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  và gọi  $r$  là hạng của  $S$ . Ta đánh số lại các vectơ riêng và trị riêng nếu cần để có  $r$  vectơ riêng đầu là độc lập tuyến tính. Nếu  $r < n$  thì  $(u_1, \dots, u_r, u_{r+1})$  là phụ thuộc tuyến tính :

$$u_{r+1} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_r u_r$$

Nhân hai vế với  $A$  và chú ý rằng  $Au_i = \lambda_i u_i$  ta có

$$\lambda_{r+1} u_{r+1} = c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 u_2 + \dots + c_r \lambda_r u_r$$

Ta suy ra

$$c_1 (\lambda_{r+1} - \lambda_1) u_1 + c_2 (\lambda_{r+1} - \lambda_2) u_2 + \dots + c_r (\lambda_{r+1} - \lambda_r) u_r = 0.$$

Vì  $u_1, u_2, \dots, u_r$  độc lập tuyến tính và vì

$$\lambda_{r+1} - \lambda_1 \neq 0, \lambda_{r+1} - \lambda_2 \neq 0, \dots, \lambda_{r+1} - \lambda_r \neq 0$$

nên  $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_r = 0$ . Vậy  $u_{r+1} = \theta$ , điều đó trái giả thiết  $u_{r+1}$  là vectơ riêng. Do đó  $r$  không thể nhỏ hơn  $n$ , nghĩa là có  $r = n$ . Nói cách khác ma trận  $A$  có  $n$  vectơ riêng độc lập tuyến tính.

*Thí dụ 7.3.4.* Ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

có ba trị riêng khác nhau

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$$

(bạn đọc có thể kiểm tra lại).

Do đó tồn tại ma trận khả đảo  $P$  để

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

### BÀI TẬP 7.4 – 7.10.



## 7.4. VẤN ĐỀ CHÉO HOÁ TRỰC GIAO

### 7.4.1. Mở đầu

Trong phần này ta sẽ tìm lời giải đáp cho bài toán 2b đề ra ở 7.3.1 và 7.3.2. Câu trả lời liên quan đến một lớp ma trận rất quan trọng là *ma trận đối xứng*.

Trước hết ta nhắc lại khái niệm *ma trận trực giao*. Ma trận vuông  $A$  gọi là ma trận trực giao nếu  $A^t A = I$ .

### 7.4.2. Khái niệm chéo hoá trực giao

**Định nghĩa 7.4.1.** Cho ma trận vuông  $A$ . Nếu tồn tại ma trận trực giao  $P$  sao cho  $P^{-1}AP$  là ma trận chéo thì nói  $A$  là chéo hoá trực giao được và  $P$  là ma trận làm chéo hoá trực giao ma trận  $A$ .

Ta phải trả lời hai câu hỏi : 1) Những ma trận thế nào thì chéo hoá trực giao được ? 2) Ma trận  $P$  thực hiện quá trình chéo hoá trực giao đó là ma trận nào ?

### 7.4.3. Giải bài toán chéo hoá trực giao

**Định lí 7.4.1.** Giả sử  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$ . Điều kiện cần và đủ để  $A$  chéo hoá trực giao được là  $A$  có  $n$  vectơ riêng trực chuẩn.

**Chứng minh :** a) Giả sử  $A$  chéo hoá trực giao được. Khi đó có một ma trận trực giao  $P$  sao cho  $P^{-1}AP$  là ma trận chéo. Như trong chứng minh định lí 7.3.1 đã chỉ rõ,  $n$  vectơ cột của  $P$  là các vectơ riêng của  $A$ . Vì  $P$  trực giao, nên có thể xem các vectơ đó là trực chuẩn, do đó  $A$  có  $n$  vectơ riêng trực chuẩn.

b) Giả sử  $A$  có  $n$  vectơ riêng trực chuẩn

$$\{p_1, p_2, \dots, p_n\}.$$

Như trong chứng minh định lí 7.3.1 đã chỉ rõ, ma trận  $P$  nhận các vectơ riêng đó làm các cột sẽ chéo hoá ma trận  $A$ . Vì những vectơ riêng này là trực chuẩn nên  $P$  là trực giao. Vậy  $P$  chéo hoá trực giao  $A$ .

#### 7.4.4. Chéo hoá trực giao các ma trận đối xứng

**Định lí 7.4.2.** Xét ma trận vuông  $A$  cấp  $n$ . Điều kiện cần và đủ để ma trận  $A$  chéo hoá trực giao được là  $A$  đối xứng.

*Chứng minh :* Chứng minh định lí 7.4.1 chứng tỏ rằng một ma trận cấp  $n$  chéo hoá trực giao được sẽ chéo hoá trực giao được bởi một ma trận  $P$  cấp  $n$  mà các cột được tạo nên bởi họ trực chuẩn các vectơ riêng của  $A$ . Gọi  $D$  là ma trận

$$D = P^{-1}AP$$

thì

$$A = PDP^{-1}.$$

Nhưng vì  $P$  là trực giao nên

$$A = PDP^t.$$

Do đó

$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = PD^t P^t = PDP^t = A$$

Vậy  $A^t = A$ , nghĩa là  $A$  là ma trận đối xứng.

Phần ngược lại suy từ định lí 7.1.3 và 7.3.1.

#### 7.4.5. Thêm một số tính chất của trị riêng của ma trận đối xứng

Vì ma trận đối xứng  $A$  chéo hoá trực giao được nên tồn tại ma trận trực giao  $P$  để

$$P^{-1}AP = D$$

trong đó  $D$  là ma trận chéo các trị riêng của  $A$ . Vậy  $A$  và  $D$  có các trị riêng trùng nhau với cùng một số vectơ riêng độc lập tuyến tính ứng mỗi trị riêng. Do đó có kết quả :

**Định lí 7.4.3.** Nếu ma trận vuông  $A$  đối xứng thì các vectơ riêng thuộc những không gian riêng khác nhau sẽ trực giao theo tích vô hướng Euclid trong  $\mathbf{R}^n$ .

*Chứng minh :* Giả sử  $\lambda$  và  $\mu$  là hai trị riêng khác nhau của  $A$ , đồng thời  $v$  thuộc không gian riêng ứng  $\lambda$  và  $w$  thuộc không gian riêng ứng  $\mu$ . Ta có

$$Av = \lambda v, Aw = \mu w, \lambda \neq \mu$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n, w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Theo định nghĩa 5.7.2 về tích vô hướng Euclid trong  $\mathbf{R}^n$

$$\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = [v]^t [w].$$

Ta phải chứng minh  $\langle v, w \rangle = 0$ . Ta có

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, w \rangle &= \langle \lambda v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = [Av]^t [w] \\ &= (A[v])^t [w] = [v]^t A^t [w] = [v]^t A[w] \\ &= \langle v, Aw \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Do đó :

$$(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$$

Nhưng theo giả thiết  $\lambda \neq \mu$  nên đẳng thức này buộc  $\langle w, v \rangle = 0$ , nghĩa là  $v$  và  $w$  trực giao theo tích vô hướng Euclid.

Ngoài ra ta còn có

**Định lý 7.4.4.** Nếu ma trận  $A$  đối xứng thì số bội hình học của mỗi trị riêng bằng số bội đại số của nó,

nghĩa là : nếu trị riêng  $\lambda$  là nghiệm bội  $m$  của phương trình đặc trưng của  $A$  thì ứng với  $\lambda$  có đủ  $m$  vectơ riêng độc lập tuyến tính,

nói cách khác : không gian riêng ứng  $\lambda$  có số chiều đúng bằng  $m$ .

Ta suy ra

#### 7.4.6. Quy trình chéo hoá trực giao các ma trận đối xứng

**Bước 1.** Tìm một cơ sở cho mỗi không gian riêng của ma trận đối xứng  $A$ .

**Bước 2.** Áp dụng quá trình trực giao hoá của Gram – Smidt vào mỗi cơ sở đó để được một cơ sở trực chuẩn cho mỗi không gian riêng.

**Bước 3.** Lập ma trận  $P$  mà các cột là các vectơ cơ sở xây dựng ở bước. 2. Ma trận  $P$  này sẽ làm chéo hoá trực giao ma trận  $A$ .

**Thí dụ 7.4.1.** Hãy tìm ma trận trực giao  $P$  làm chéo hoá ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

*Giải* : Trước hết ta nhận xét ngay rằng ma trận  $A$  này đối xứng.

Phương trình đặc trưng của  $A$  là

$$\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(8 - \lambda) = 0.$$

Dùng phương pháp ở thí dụ 7.1.4 ta tìm được cơ sở của không gian riêng ứng  $\lambda = 2$  là

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ và } u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Áp dụng quá trình trực giao hoá Gram - Smidt vào  $\{u_1, u_2\}$  ta được những vectơ riêng trực chuẩn ứng  $\lambda = 2$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ và } v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Không gian riêng ứng  $\lambda = 8$  là

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chuẩn hoá nó ta được

$$v_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Cuối cùng ta lấy  $v_1, v_2, v_3$  làm các cột cho  $P$  ta được

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Ma trận  $P$  này sẽ làm chéo hoá ma trận  $A$ .

BÀI TẬP : 7.11, 7.12.

## 7.5. PHỤ LỤC

### 7.5.1. Chứng minh định lí 7.1.3

#### *Toán tử tự liên hợp*

Sau đây khi  $T$  là một toán tử tuyến tính thì viết  $T(x)$  hay  $Tx$  ta hiểu là cùng một nghĩa.

**Định nghĩa 7.5.1.** Toán tử tuyến tính  $T$  trong không gian Euclid thực  $n$  chiều  $V_n$  gọi là tự liên hợp nếu

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in V_n$$

Giả sử  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $V_n$  và

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n, \quad y = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_n e_n.$$

Gọi  $A = [a_{ij}]$  là ma trận của  $T$  trong cơ sở  $B$ .

**Định lí 7.5.1.**

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \Leftrightarrow A^t = A$$

*Chứng minh.*

Nếu  $T$  tự liên hợp thì

$$\langle Te_i, e_j \rangle = \langle e_i, Te_j \rangle \quad \forall i, j.$$

Nhưng theo công thức (6.3.6) thì

$$\langle Te_i, e_j \rangle = \langle e_j, Te_i \rangle = a_{ji}, \quad \langle e_i, Te_j \rangle = a_{ij}.$$

Vậy  $A^t = A$ .

Ngược lại giả sử  $A^t = A$  nghĩa là  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ . Ta có

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \left\langle T \left[ \sum_{i=1}^n x_i e_i \right], \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle Te_i, e_j \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle e_j, Te_i \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j a_{ji} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, Ty \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, T \left[ \sum_{j=1}^n y_j e_j \right] \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle e_i, Te_j \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j a_{ij}. \end{aligned}$$

Vậy  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \forall x, y \in V \Rightarrow T$  tự liên hợp.

**Định lí 7.5.2.** Nếu  $T$  là toán tử tự liên hợp trên không gian Euclid  $m$  chiều  $V_m$  ( $m \geq 1$ ) thì  $T$  có ít nhất một trị riêng thực, nghĩa là tồn tại  $\lambda \in \mathbf{R}$  và  $w \in V_m, w \neq \theta$  để  $Tw = \lambda w$ .

*Chứng minh.*

Giả sử  $B = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $V_m$ ,  $C = [c_{ij}] = [\langle y_i, Ty_j \rangle]$  là ma trận của  $T$  trong cơ sở  $B$ .

Theo định lí 2.6.2  $C$  có ít nhất một trị riêng. Vì  $T$  tự liên hợp nên theo định lí 7.5.1 ma trận  $C$  đối xứng. Do đó, kết hợp với định lí 7.1.2 ta suy ra  $C$  có trị riêng thực  $\lambda \in \mathbf{R}$  và vectơ riêng thực  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in \mathbf{R}^m$

Khi đó

$$Tw = \lambda w, \text{ với } w = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_m y_m \in V_m.$$

**Định lí 7.5.3.** Nếu  $T$  là toán tử tự liên hợp trên không gian Euclid  $n$  chiều  $V_n$  ( $n \geq 1$ ) thì  $T$  có  $n$  trị riêng thực và  $n$  vectơ riêng trực chuẩn.

*Chứng minh.*

Vì  $T$  tự liên hợp trên  $V_n$  nên theo định lí 7.5.2 tồn tại  $\lambda_1 \in \mathbf{R}$  và  $v_1 \in V_n$  để

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1, \quad \|v_1\| = 1.$$

Đặt

$$M_1 = \text{Span}\{v_1\}, \quad N_1 = \{v \mid v \in V_n, \langle v_1, v \rangle = 0\}$$

thì  $N_1$  là phần bù trực giao của  $M_1$ . Nó là một không gian con của  $V_n$ . Ta có  $\dim(M_1) = 1$ ,  $\dim(N_1) = n - 1$ .

Nếu  $n = 1$  thì  $\dim(N_1) = 0$ ;  $V_n = V_1$ ;  $\{v_1\}$  là một cơ sở của  $M_1 = V_1$  và do đó định lí được chứng minh.

Xét trường hợp  $n > 1$ . Khi đó  $\dim(N_1) \neq 0$ . Nếu  $y \in N_1$  thì  $\langle v_1, y \rangle = 0$  và theo định lí 7.5.1 ta có

$$\langle Ty, v_1 \rangle = \langle y, Tv_1 \rangle = \langle y, \lambda_1 v_1 \rangle = \lambda_1 \langle y, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow Ty \in N_1.$$

Vậy  $N_1$  là không gian con của  $V_n$  và  $T$  là toán tử tự liên hợp trên  $N_1$ . Do đó tồn tại  $\lambda_2 \in \mathbf{R}$  và  $v_2 \in N_1 \subset V_n$  để

$$Tv_2 = \lambda_2 v_2, \quad \|v_2\| = 1, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Toàn bộ lập luận trên có thể làm lại cho  $M_2 = \text{Span}\{v_1, v_2\}$  thay cho  $M_1$  và  $N_2 = \{v \mid \langle v_1, v \rangle = 0, \langle v_2, v \rangle = 0\}$  thay cho  $N_1$ , v.v. Vì  $\dim(N_2) = \dim(N_1) - 1 = (n - 1) - 1 = n - 2$ , v.v., nên đến lần thứ  $n$  thì  $\dim(N_n) = n - n = 0$  ta dừng lại và được  $n$  vectơ riêng trực chuẩn của  $T$ .

**Định lí 7.1.3.** Mỗi ma trận  $A$  đối xứng cấp  $n$  có  $n$  trị riêng thực và  $n$  vectơ riêng trực chuẩn trong  $\mathbf{R}^n$ .

*Chứng minh.* Gọi  $T$  là toán tử tuyến tính trên không gian Euclid  $V_n = \mathbf{R}^n$  xác định bởi ma trận  $A$ . Vì  $A$  đối xứng nên theo định lí 7.5.1  $T$  tự liên hợp. Do đó theo định lí 7.5.3  $T$  có  $n$  trị riêng thực  $\lambda_i$  và  $n$  vectơ riêng  $v_i$  trực chuẩn trong  $V_n = \mathbf{R}^n$  :

$$Tv_i = \lambda_i v_i$$

Ta suy ra :  $A$  có  $n$  trị riêng thực và  $n$  vectơ riêng trực chuẩn trong  $\mathbf{R}^n$ .

### TÓM TẮT CHƯƠNG VII

#### Trị riêng và vectơ riêng của ma trận

Cho ma trận vuông  $A$  cấp  $n$

Số  $\lambda$  gọi là trị riêng của  $A$  nếu phương trình

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathbf{R}^n$$

có nghiệm không tầm thường ; vectơ nghiệm khác  $\theta$  này gọi là vectơ riêng ứng trị riêng  $\lambda$ .

Để tìm các trị riêng của  $A$  ta có phương trình

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

gọi là *phương trình đặc trưng* của  $A$ .

Khi đã tìm ra trị riêng  $\lambda$  thì vectơ riêng tương ứng là nghiệm không tầm thường của hệ thuần nhất

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

#### Trị riêng và vectơ riêng của toán tử tuyến tính

$V$  là một không gian vectơ

$T : V \rightarrow V$  là một toán tử tuyến tính trên  $V$



Số  $\lambda$  gọi là trị riêng của  $T$  nếu phương trình

$$Tv = \lambda v, v \in V$$

có nghiệm  $v \neq \theta$ ; nghiệm  $v \neq \theta$  gọi là vectơ riêng ứng trị riêng  $\lambda$ .

Muốn tìm trị riêng và vectơ riêng của  $T$ , ta chọn trong  $V$  một cơ sở xác định  $B$ , xây dựng ma trận  $A$  của  $T$  đối với cơ sở  $B$  đó, tìm trị riêng của ma trận  $A$ , đó chính là trị riêng của  $T$ . Còn biểu thức của vectơ riêng thì phụ thuộc cơ sở  $B$  đã chọn.

Chú ý rằng khi đổi cơ sở từ  $B$  thành  $B'$  thì ma trận của ánh xạ  $T$  đối với cơ sở mới  $B'$  sẽ thành  $A'$  và  $A' \neq A$ , nhưng vì  $A'$  đồng dạng với  $A$  nên trị riêng không thay đổi.

### Chéo hoá ma trận

Cho ma trận vuông  $A$  cấp  $n$ . Nếu tồn tại ma trận  $P$  khả đảo cấp  $n$  sao cho  $P^{-1}AP = D$  là ma trận chéo thì nói ma trận  $A$  chéo hoá được và  $P$  làm chéo hoá  $A$ .

Điều kiện cần và đủ để  $A$  chéo hoá được là  $A$  có  $n$  vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Điều kiện đủ để  $A$  chéo hoá được là  $A$  có  $n$  trị riêng khác nhau.

Cho ma trận vuông  $A$  cấp  $n$ . Nếu tồn tại ma trận trực giao  $P(P^tP = I)$  sao cho  $P^{-1}AP = D$  là ma trận chéo thì nói  $A$  chéo hoá trực giao được và  $P$  làm chéo hoá trực giao  $A$ .

Điều kiện cần và đủ để  $A$  chéo hoá trực giao được là  $A$  có  $n$  vectơ riêng trực chuẩn.

Điều kiện cần và đủ để  $A$  chéo hoá trực giao được là  $A$  là ma trận đối xứng.

## BÀI TẬP CHƯƠNG VII

7.1. Tìm các trị riêng và cơ sở của không gian riêng của các ma trận sau :

$$1) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$7) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$8) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$9) \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$10) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$11) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$12) \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$$

$$13) \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$14) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$15) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$16) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

7.2. Cho  $T : P_2 \rightarrow P_2$  xác định bởi

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$$

(a) Tìm các trị riêng của  $T$ .

(b) Tìm cơ sở của không gian riêng của  $T$ .

7.3. Chứng minh rằng  $\lambda = 0$  là trị riêng của ma trận  $A$  khi và chỉ khi  $A$  suy biến.

7.4. Chứng minh rằng các ma trận sau không chéo hoá được.

$$1) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

7.5. Tìm ma trận  $P$  làm chéo hoá  $A$  và xác định  $P^{-1}AP$

$$1) A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7.6. Hỏi ma trận  $A$  dưới đây có chéo hoá được không. Nếu được thì tìm ma trận  $P$  làm chéo hoá  $A$  và xác định  $P^{-1}AP$ .

$$1) A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2) A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3) A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$4) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$6) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7.7. Cho  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  là toán tử tuyến tính

$$T(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, 2x_1 + x_2).$$

Hãy tìm một cơ sở của  $\mathbf{R}^2$  trong đó ma trận của  $T$  có dạng chéo.

7.8. Cho  $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  là toán tử tuyến tính

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3).$$

Hãy tìm một cơ sở của  $\mathbf{R}^3$  trong đó ma trận của  $T$  có dạng chéo.

7.9. Cho  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Hãy tính  $A^{10}$ .

7.10. Cho  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Chứng minh :

(a)  $A$  chéo hoá được nếu  $(a - d)^2 + 4bc > 0$ .

(b)  $A$  không chéo hoá được nếu  $(a - d)^2 + 4bc < 0$ .

7.11. Tìm ma trận  $P$  làm chéo hoá trực giao  $A$  và xác định  $P^{-1}AP$  :

1)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

3)  $A = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$

4)  $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

5)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

7)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8)  $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

7.12. Tìm ma trận làm chéo hoá trực giao

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad b \neq 0.$$

### ĐÁP SỐ

7.1. 1)  $\lambda = 3, (1/2, 1)$ ;  $\lambda = -1, (0, 1)$

2)  $\lambda = 4, (3/2, 1)$

2.108.

3)  $\lambda = \sqrt{12}, (3/\sqrt{12}, 1); \lambda = -\sqrt{12}, (-3/\sqrt{12}, 1)$

4) Không có trị riêng thực. Không có không gian riêng.

5)  $\lambda = 0, (1, 0)$  và  $(0, 1)$

6)  $\lambda = 1, (1, 0)$  và  $(0, 1)$

7)  $\lambda = -1, (0, 1, -1)$

8)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$(1, 2, 0), (0, 0, 1)$

9)  $\lambda_1 = 1, (1, 1, 1).$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0, (1, 2, 3)$

10)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, (3, 1, 1)$

11)  $\lambda_1 = 3, (1, 2, 2)$

$\lambda_2 = \lambda_3 = -1, (1, 2, 1)$

12)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (2, 1, 0), (-1, 0, 1)$

$\lambda_3 = -1, (3, 5, 6)$

13)  $\lambda_1 = 1, (1, 2, 1)$

$\lambda_2 = 2 + 3i, (3 - 3i, 5 - 3i, 4)$

$\lambda_3 = 2 - 3i, (3 + 3i, 5 + 3i, 4)$

14)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (0, 0, 0, 1)$

$\lambda_3 = \lambda_4 = 0, (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$

15)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$

$\lambda_3 = \lambda_4 = 0, (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$

16)  $\lambda = 2, (1, 1, -1, 0), (1, 1, 0, 1).$

7.2. a)  $\lambda = -4, \lambda = 3$

b)  $\lambda = -4 : -2 + \frac{8}{3}x + x^2$

$\lambda = 3 : 5 - 2x + x^2.$

$$7.5. 1) P = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2) P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3) P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4) P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7.6. 1) Không

$$2) P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3) Không

$$4) P = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Không

$$6) P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

7.7. (2, 1), (1, -1)

7.8. (1, 1, -1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)

$$7.9. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{bmatrix}$$

$$7.11. 1) P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2) P = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$3) P = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$$

$$4) P = \begin{bmatrix} -4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$7) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$8) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

## Chương VIII

# DẠNG TOÀN PHƯƠNG

### 8.1. DẠNG TUYẾN TÍNH TRÊN KHÔNG GIAN VECTƠ $V$

$V$  là một không gian vectơ,  $\mathbf{R}$  là trường các số thực.

**Định nghĩa 8.1.1.** Một ánh xạ  $f : V \rightarrow \mathbf{R}$  gọi là một *dạng tuyến tính* trên  $V$  nếu

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad x, y \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

Ta cũng nói  $f(x)$  tuyến tính đối với  $x \in V$ .

*Thí dụ 8.1.1.*

Tích phân

$$J(u) := \int_a^b u(t) dt, \quad u \in C[a, b]$$

là một dạng tuyến tính trên  $V = C[a, b]$ .

$v := ax, a = \text{const}$  là một dạng tuyến tính trên  $V = \mathbf{R}$  ;

$\omega := ax + b, a = \text{const}, b = \text{const}$  khác 0 không phải là một dạng tuyến tính trên  $V = \mathbf{R}$ .

Đề nghị bạn đọc kiểm tra lại.

### 8.2. DẠNG SONG TUYẾN TRÊN KHÔNG GIAN VECTƠ $V$

#### 8.2.1. Dạng song tuyến

**Định nghĩa 8.2.1.** Ánh xạ  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  gọi là một *dạng song tuyến* trên  $V$  nếu nó tuyến tính đối với  $x$  khi  $y$  cố định và tuyến tính đối với  $y$  khi  $x$  cố định, tức là



$$\varphi(kx + hx', y) = k\varphi(x, y) + h\varphi(x', y), \forall x, x' \in V, y \in V, \forall k, h \in \mathbf{R}$$

$$\varphi(x, ky + hy') = k\varphi(x, y) + h\varphi(x, y'), x \in V, \forall y, y' \in V, \forall k, h \in \mathbf{R}$$

*Thí dụ 8.2.1.* Tích phân

$$\varphi(u, v) := \int_a^b u(t)v(t)dt, \quad u, v \in C[a, b] \quad (8.2.1)$$

là một dạng song tuyến trên  $V = C[a, b]$ .

*Thí dụ 8.2.2.* Cho  $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ . Hàm

$$\psi(x, y) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \quad (8.2.2)$$

là một dạng song tuyến trên  $V = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ .

Đề nghị bạn đọc kiểm tra lại.

### 8.2.2. Dạng song tuyến đối xứng

**Định nghĩa 8.2.2.** Dạng song tuyến  $\varphi(x, y)$  trên  $V$  gọi là *dạng song tuyến đối xứng* nếu

$$\varphi(y, x) = \varphi(x, y) \quad \forall x, y \in V.$$

*Thí dụ 8.2.3.* Các dạng song tuyến (8.2.1) và (8.2.2) là các dạng song tuyến đối xứng.

Tích vô hướng của hai vectơ trong một không gian vectơ là một dạng song tuyến đối xứng.

Đề nghị bạn đọc kiểm tra lại.

## 8.3. DẠNG TOÀN PHƯƠNG TRÊN KHÔNG GIAN VECTƠ V

### 8.3.1. Định nghĩa

**Định nghĩa 8.3.1.** Khi dạng song tuyến  $\varphi(x, y)$  đối xứng thì biểu thức thu được bằng cách thay  $y$  bởi  $x$

$$\varphi(x, x) := \varphi(x, y) \Big|_{y=x}$$

gọi là một *dạng toàn phương* trên  $V$ .

Lúc đó ta nói dạng song tuyến  $\varphi(x, y)$  là dạng song tuyến gốc sinh ra dạng toàn phương  $\varphi(x, x)$ .

*Thí dụ 8.3.1.* Từ thí dụ 8.2.3 ta suy ra : Hàm

$$\varphi(u, u) = \int_a^b u^2(t) dt, \quad u \in C[a, b]$$

là một dạng toàn phương trên  $V = C[a, b]$  sinh bởi dạng song tuyến  $\varphi(u, v)$  ở (8.2.1).

Phiếm hàm

$$\psi(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

là một dạng toàn phương trên  $V = \mathbf{R}^2$  sinh bởi dạng song tuyến  $\psi(x, y)$  ở (8.2.2).

### 8.3.2. Phân loại các dạng toàn phương

Ta nói dạng toàn phương  $\psi(x, x)$

(i) xác định dương nếu

$$\psi(x, x) > 0 \quad \forall x \in V, x \neq 0;$$

(ii) nửa xác định dương (hay xác định không âm) nếu

$$\psi(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in V, x \neq 0;$$

(iii) xác định âm nếu

$$\psi(x, x) < 0 \quad \forall x \in V, x \neq 0;$$

(iv) nửa xác định âm (hay xác định không dương) nếu

$$\psi(x, x) \leq 0 \quad \forall x \in V, x \neq 0;$$

(v) dấu không xác định nếu nó có thể dương cũng như âm.

*Thí dụ 8.3.2.*

Dạng toàn phương  $\int_a^b v^2(t) dt$  trên  $C[a, b]$  là dạng toàn phương xác định dương ;

Dạng toàn phương  $x_1^2 + 2x_2^2$  trên  $\mathbf{R}^2$  là dạng toàn phương xác định dương ;

Dạng toàn phương  $x_1^2 + 2x_3^2$  trên  $\mathbf{R}^3$  là dạng toàn phương nửa xác định dương ;

Dạng toàn phương  $x_1^2 - 2x_2^2$  trên  $\mathbf{R}^2$  là dạng toàn phương dấu không xác định.

Đề nghị bạn đọc kiểm tra lại.

## 8.4. DẠNG SONG TUYẾN VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG TRÊN KHÔNG GIAN $n$ CHIỀU

### 8.4.1. Dạng song tuyến trên không gian $n$ chiều

$V = V_n$  là một không gian  $n$  chiều ;

Giả sử  $\psi(x, y)$  là một dạng song tuyến trên  $V_n$ .

Trong  $V_n$  ta chọn một cơ sở xác định :

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

Khi đó  $x, y \in V_n$  có biểu diễn

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j ;$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là tọa độ của  $x$  còn  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  là tọa độ của  $y$  trong cơ sở  $S$ .

Do đó

$$\psi(x, y) = \psi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \psi(e_i, e_j) x_i y_j.$$

Vậy  $\psi(x, y)$  có biểu thức

$$\psi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j, \quad (8.4.1)$$

trong đó  $a_{ij} = \psi(e_i, e_j)$  gọi là *biểu thức tọa độ của  $\psi$  trong cơ sở  $S$* .

Ma trận

$$A = [a_{ij}] = [\psi(e_i, e_j)] \quad (8.4.2)$$

gọi là *ma trận của dạng song tuyến  $\psi$  trong cơ sở  $S$* .

*Chú ý 8.4.1.* Dạng ma trận của  $\psi$ .

Theo chú ý 6.1.2 chương 6 ta có

$$[x]_S = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Vậy có

$$\psi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j \Leftrightarrow \psi(x, y) = [x]_S^t A [y]_S = [y]_S^t A [x]_S, \quad (8.4.3)$$

trong đó ma trận  $A$  xác định bởi (8.4.2).

Ta gọi (8.4.3) là *biểu thức ma trận hay dạng ma trận của  $\psi$  trong cơ sở  $S$* .

Bây giờ cho  $n^2$  số  $b_{ij}$  bất kì tức là cho ma trận  $B = [b_{ij}]$  cấp  $n$  bất kì và xét phiếm hàm

$$\varphi(x, y) := \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_iy_j = [x]_S^t B [y]_S = [y]_S^t B [x]_S \quad (8.4.4)$$

Hàm này tuyến tính đối với  $x$  khi giữ  $y$  cố định và tuyến tính đối với  $y$  khi giữ  $x$  cố định nên nó là một dạng song tuyến nhận  $B$  làm ma trận.

### 8.4.2. Dạng toàn phương trên không gian $n$ chiều

Xét dạng song tuyến  $\psi(x, y)$  có dạng (8.4.4) xác định bởi ma trận  $B = [b_{ij}]$ . Khi  $b_{ji} = b_{ij}$ , tức là khi ma trận  $B$  đối xứng thì theo định nghĩa 8.3.1

$$\varphi(x, x) = [x]_S^t B[x]_S = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$$

là một dạng toàn phương trong cơ sở  $S$  của không gian  $V_n$ .

Lúc này ma trận đối xứng  $B$  của dạng song tuyến trở thành *ma trận của dạng toàn phương trong cơ sở  $S$* .

Như vậy, mọi dạng toàn phương đều là một hàm bậc hai đẳng cấp đối với các biến  $x_1, x_2, \dots, x_n$  với ma trận đối xứng.

Bây giờ xét hàm bậc hai đẳng cấp đối với  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bất kì :

$$\varphi(x, x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$$

Khi đó

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j = [x]_S^t B[y]_S, \quad B = [b_{ij}]$$

là một dạng song tuyến.

Nếu  $B$  không đối xứng thì  $\varphi(x, y)$  không đối xứng, cho nên  $\varphi(x, x)$  đã cho không phải là một dạng toàn phương xác định bởi ma trận  $B$ .

Nhưng vì rõ ràng  $x_i x_j = x_j x_i$  nên ta có thể viết lại  $\varphi(x, x)$  :

$$\varphi(x, x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} (b_{ij} + b_{ji}) x_i x_j$$

Do đó nếu đặt

$$C = [c_{ij}] = \left[ \frac{1}{2} (b_{ij} + b_{ji}) \right]$$

thì  $\varphi(x, x)$  có thể viết

$$\varphi(x, x) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_i x_j = [x]_S^t C [x]_S$$

đồng thời, ma trận  $C$  đối xứng. Vậy  $\varphi(x, y) = [x]_S^t C [y]$  là dạng song tuyến đối xứng xác định bởi ma trận  $C$  và do đó  $\varphi(x, x) = [x]_S^t C [x]_S$  là một dạng toàn phương xác định bởi ma trận  $C$ .

Như vậy mọi hàm bậc hai đẳng cấp đối với  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bao giờ cũng có thể viết thành một dạng toàn phương đối với các biến đó trong cơ sở  $S$ .

### 8.4.3. Trường hợp riêng : $V_n = \mathbf{R}^n$ .

Bây giờ xét  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  thì

$$x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n, \quad f_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i})$$

Do đó  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là tọa độ của  $x$  trong cơ sở chính tắc  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  của  $\mathbf{R}^n$ .

Vậy mọi hàm bậc hai đẳng cấp đối với các tọa độ  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x \in \mathbf{R}^n$ .

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j$$

với ma trận hệ số  $B = [b_{ij}]$  là một dạng toàn phương với ma trận  $C = [b_{ij} + b_{ji}] / 2$  trong cơ sở chính tắc của  $\mathbf{R}^n$ .

Chú ý rằng cơ sở  $F$  là một cơ sở trực chuẩn theo tích vô hướng Euclid của  $\mathbb{R}^n$ .

## 8.5. RÚT GON DẠNG TOÀN PHƯƠNG

### 8.5.1. Dạng chính tắc của dạng toàn phương trên không gian $n$ chiều

Biểu thức của dạng toàn phương trên  $V_n$  phụ thuộc cơ sở  $S$ . Thường nó chứa cả số hạng bình phương  $x_i^2$  cả số hạng chéo  $x_i x_j$ .

**Định nghĩa 8.5.1.** Biểu thức của dạng toàn phương trong cơ sở  $S$  chỉ chứa các số hạng bình phương

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

gọi là dạng chính tắc của nó trong cơ sở  $S$ .

Ma trận của dạng chính tắc này là ma trận chéo :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{vmatrix}$$

Một dạng toàn phương ở dạng chính tắc có thể phân loại dễ dàng, chẳng hạn như nó xác định dương nếu tất cả các hệ số  $\alpha_i > 0$ .

### 8.5.2. Rút gọn dạng toàn phương

Giả sử  $V_n$  là một không gian  $n$  chiều và  $S$  là một cơ sở của nó. Xét trong cơ sở  $S$  dạng toàn phương

$$Q(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x^t A x, \quad (8.5.1)$$

trong đó ma trận  $A = [a_{ij}]$  là ma trận đối xứng. Rút gọn dạng toàn phương là đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng những

phép đổi biến tuyến tính thích hợp ; điều đó tương đương với việc tìm một cơ sở mới trong đó dạng toàn phương chỉ chứa các số hạng bình phương.

**8.5.3. Phương pháp đổi biến trực giao (hay phương pháp chéo hoá trực giao)**

Giả sử  $V_n$  là một không gian có tích vô hướng và  $S$  là một cơ sở trực chuẩn của nó. Xét trong cơ sở  $S$  dạng toàn phương (8.5.1).

Muốn rút gọn dạng toàn phương (8.5.1) người ta đổi sang một cơ sở trực chuẩn mới  $S' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  thích hợp.

Vì ma trận  $A$  đối xứng nên theo định lí 7.1.3 nó có  $n$  vectơ riêng trực chuẩn :

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

ứng với  $n$  trị riêng

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Chọn cơ sở mới là

$$S' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

và gọi  $P$  là ma trận chuyển cơ sở từ  $S$  sang  $S'$  :

$$[x]_S = P[x]_{S'}. \tag{8.5.2}$$

Trong  $S'$  dạng toàn phương (8.5.1) trở thành

$$(P[x]_{S'})' A (P[x]_{S'}) = ([x]_{S'})' P' A P [x]_{S'} = ([x]_{S'})' A' [x]_{S'}.$$

Vì  $S$  và  $S'$  cùng trực chuẩn nên theo định lí 5.8.2 ta có

$$P' = P^{-1} \Rightarrow A' = P' A P = P^{-1} A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Vậy bằng phép đổi biến (8.5.2) dạng toàn phương (8.5.1) đã cho trong  $S$  sẽ có trong  $S'$  dạng sau :



$$\lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \dots + \lambda_n(x'_n)^2 \quad (8.5.3)$$

Đó là dạng chính tắc trong cơ sở  $S'$  của dạng toàn phương đã cho.

Phép đổi biến (8.5.2) có ma trận chuyển cơ sở  $P$  là ma trận trực giao, cho nên phương pháp này gọi là phương pháp đổi biến trực giao.

Nó dựa vào quy trình chéo hoá trực giao ma trận đối xứng  $A$  nên người ta cũng gọi nó là phương pháp chéo hoá trực giao ma trận.

Vậy có

**Định lí 8.5.1.** Mọi dạng toàn phương cho trong một cơ sở trực chuẩn có thể đưa về dạng chính tắc bằng một phép đổi biến trực giao.

**Thí dụ 8.5.1.** Xét dạng toàn phương trên  $\mathbf{R}^2$  xác định bởi

$$Q(x, x) := 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 \quad (8.5.4)$$

trong cơ sở chính tắc

$$\{e_1, e_2\}, \quad e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$$

Nó có ma trận đối xứng

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Ma trận đối xứng này có hai trị riêng  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 9$  ứng với hai vectơ riêng trực chuẩn

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

tạo thành cơ sở trực chuẩn mới trong đó dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc đối với biến mới  $(\xi_1, \xi_2)$ :

$$Q = 4\xi_1^2 + 9\xi_2^2. \quad (8.5.5)$$

Công thức đổi biến là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (8.5.6)$$

Sau đây là một hệ quả của (8.5.3) :

**Định lí 8.5.2.**  $Q(x, x)$  là một dạng toàn phương trong cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid  $n$  chiều với ma trận đối xứng  $A$ . Gọi  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  là các trị riêng của  $A$ . Khi đó dạng toàn phương sẽ

(i) xác định dương khi và chỉ khi  $\lambda_i > 0$  với  $1 \leq i \leq n$  ;

(ii) nửa xác định dương khi và chỉ khi  $\lambda_i \geq 0$  với  $1 \leq i \leq n$  ;

(iii) xác định âm khi và chỉ khi  $\lambda_i < 0$  với  $1 \leq i \leq n$  ;

(iv) nửa xác định âm khi và chỉ khi  $\lambda_i \leq 0$  với  $1 \leq i \leq n$  ;

(v) dấu không xác định khi và chỉ khi vừa có trị riêng dương vừa có trị riêng âm.

#### 8.5.4. Phương pháp đổi biến tam giác hay phương pháp Jacobi

Xét dạng toàn phương  $Q(x, x)$  trên không gian  $n$  chiều  $V_n$ . Trong cơ sở cũ  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  nó có biểu thức

$$Q(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (8.5.7)$$

trong đó

$$a_{ij} = Q(e_i, e_j) = Q(e_j, e_i) = a_{ji}. \quad (8.5.8)$$

Giả sử

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (8.5.9)$$

Để tìm một cơ sở mới  $S' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  trong đó dạng toàn phương không có số hạng chéo ta tìm các  $f_i$  sao cho

$$Q(f_i, f_k) = 0 \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (8.5.10)$$

Muốn thế ta đặt

$$\begin{aligned}f_1 &= \alpha_{11} e_1 \\f_2 &= \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 \\&\vdots \\f_n &= \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \dots + \alpha_{nn} e_n\end{aligned}\tag{8.5.11}$$

và xác định các  $\alpha_{ij}$  sao cho (8.5.10) thoả mãn.

Từ (8.5.11) ta suy ra :

$$Q(f_k, e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \Rightarrow Q(f_k, f_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

Do đó để có (8.5.10) ta chỉ cần thoả mãn điều kiện

$$Q(f_k, e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad k = 1, 2, \dots, n.\tag{8.5.12}$$

Vì vế phải của (8.5.12) bằng không nên các điều kiện (8.5.12) xác định  $f_k$  sai khác một hệ số nhân. Để ấn định hệ số đó ta đặt thêm điều kiện

$$Q(f_k, e_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, n.\tag{8.5.13}$$

Với mỗi  $k$  xác định, điều kiện (8.5.12) và (8.5.13) viết

$$\begin{aligned}a_{11} \alpha_{k1} + a_{12} \alpha_{k2} + \dots + a_{1k} \alpha_{kk} &= 0 \\a_{21} \alpha_{k1} + a_{22} \alpha_{k2} + \dots + a_{2k} \alpha_{kk} &= 0 \\&\vdots \\a_{(k-1)1} \alpha_{k1} + a_{(k-1)2} \alpha_{k2} + \dots + a_{(k-1)k} \alpha_{kk} &= 0 \\a_{k1} \alpha_{k1} + a_{k2} \alpha_{k2} + \dots + a_{kk} \alpha_{kk} &= 1.\end{aligned}\tag{8.5.14}$$

Định thức của hệ (8.5.14) chính là  $\Delta_k$  mà ở (8.5.9) ta đã giả thiết khác 0. Vậy  $f_k$  được xác định với mọi  $k$ . Ta suy ra

$$\alpha_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.\tag{8.5.15}$$

Bây giờ trong cơ sở mới  $S' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  thoả mãn (8.5.12) và (8.5.13) dạng toàn phương  $Q$  có biểu thức

$$Q = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \xi_i \xi_j,$$

trong đó  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  là biến mới và  $b_{ij} = Q(f_i, f_j)$ .

Theo (8.5.10) thì  $b_{ij} = 0$  khi  $i \neq j$ . Cho nên

$$Q = \sum_{i=1}^n b_{ii} \xi_i^2. \tag{8.5.16}$$

Để tính  $b_{ii}$  ta có

$$b_{ii} = Q(f_i, f_i) = Q(f_i, \alpha_{i1} e_1 + \alpha_{i2} e_2 + \dots + \alpha_{in} e_n).$$

Do đó theo (8.5.12) ta suy ra

$$b_{ii} = \alpha_{i1} Q(f_i, e_1) + \alpha_{i2} Q(f_i, e_2) + \dots + \alpha_{in} Q(f_i, e_n) = \alpha_{ii}.$$

Chú ý đến (8.5.15) ta có

$$b_{ii} = \alpha_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}. \tag{8.5.17}$$

Vậy có

**Định lí 8.5.3.** Dạng toàn phương  $Q(x, x)$  đã cho có dạng chính tắc trong cơ sở  $S'$  :

$$Q = \frac{1}{\Delta_1} \xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \xi_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \xi_n^2. \tag{8.5.18}$$

Căn cứ vào (8.5.11) ma trận chuyển cơ sở là ma trận tam giác trên :

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

cho nên phương pháp Jacobi còn gọi là phương pháp đổi biến tam giác.

*Thí dụ 8.5.2.* Xét dạng toàn phương (8.5.4) ở thí dụ 8.5.1. Nó có ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Do đó

$$\Delta_1 = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = 36 > 0.$$

Vậy dạng toàn phương (8.5.4) có dạng chính tắc

$$Q = \frac{1}{\Delta_1} \xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \xi_2^2 = \frac{1}{5} \xi_1^2 + \frac{5}{36} \xi_2^2. \quad (8.5.19)$$

Muốn tìm công thức đổi biến ta phải xác định các vectơ cơ sở mới  $f_1, f_2$ . Ta dựa vào (8.5.11), (8.5.12), (8.5.13). Ta có

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_{11} e_1 &&= (\alpha_{11}, 0) \\ f_2 &= \alpha_{21} e_1 + \alpha_{22} e_2 &&= (\alpha_{21}, \alpha_{22}) \end{aligned}$$

Để xác định  $\alpha_{11}$  ta viết theo (8.5.10), (8.5.11) khi  $k = 1$

$$Q(f_1, e_1) = 1 \Rightarrow 5\alpha_{11} = 1 \Rightarrow \alpha_{11} = \frac{1}{5} \Rightarrow f_1 = \left( \frac{1}{5}, 0 \right)$$

Để xác định  $\alpha_{21}$  và  $\alpha_{22}$  ta viết theo (8.5.10), (8.5.11) khi  $k = 2$

$$Q(f_2, e_1) = 0, \quad Q(f_2, e_2) = 1$$

tức là

$$a_{11} \alpha_{21} + a_{12} \alpha_{22} = 0$$

$$a_{21} \alpha_{21} + a_{22} \alpha_{22} = 1$$

Do đó

$$5\alpha_{21} - 2\alpha_{22} = 0$$

$$-2\alpha_{21} + 8\alpha_{22} = 1$$

Ta suy ra  $\alpha_{21} = 1/18$  và  $\alpha_{22} = 5/36$ . Vậy

$$f_2 = \left( \frac{1}{18}, \frac{5}{36} \right)$$

Vậy công thức đổi biến là

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/18 \\ 0 & 5/36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \tag{8.5.20}$$

Một hệ quả của định lí 8.5.3 là phân đầu của định lí sau :

**Định lí 8.5.4.** *Dạng toàn phương (8.5.7) xác định dương khi và chỉ khi*

$$\Delta_i > 0, 1 \leq i \leq n \tag{8.5.21}$$

*Chứng minh.* Điều kiện (8.5.21) là điều kiện đủ vì đó là hệ quả của dạng chính tắc (8.5.18).

Muốn chứng minh (8.5.21) là điều kiện cần trước hết ta chứng minh  $\Delta_i \neq 0 \forall i$ . Giả sử

$$\Delta_i := \begin{bmatrix} Q(e_1, e_1) & Q(e_1, e_2) & \dots & Q(e_1, e_i) \\ Q(e_2, e_1) & Q(e_2, e_2) & \dots & Q(e_2, e_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q(e_i, e_1) & Q(e_i, e_2) & \dots & Q(e_i, e_i) \end{bmatrix} = 0$$

Lúc đó tồn tại  $i$  hàng số  $c_i$  không đồng thời bằng không để

$$\begin{aligned} c_1 Q(e_1, e_i) + c_2 Q(e_2, e_i) + \dots + c_i Q(e_i, e_i) &= 0 \\ \Rightarrow Q(c_1 e_1, e_i) + Q(c_2 e_2, e_i) + \dots + Q(c_i e_i, e_i) &= 0 \\ \Rightarrow Q(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_i e_i, e_i) &= 0 \\ \Rightarrow Q(c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_i e_i, c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_i e_i) &= 0 \\ \Rightarrow c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_i e_i &= 0 \end{aligned}$$

Điều đó mâu thuẫn với tính độc lập tuyến tính của  $\{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ .

Bây giờ nếu có một số  $\Delta_i < 0$  thì trong các hệ số của dạng chính tắc (8.5.18) vừa có hệ số âm vừa có hệ số dương. Do đó nếu chọn  $\xi_i$  như sau :

$$\xi_i = \begin{cases} 0 & \text{khi hệ số của } \xi_i \text{ dương} \\ 1 & \text{khi hệ số của } \xi_i \text{ âm} \end{cases}$$

Với  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  chọn như vậy ta sẽ thấy  $Q(\xi, \xi) < 0$ . Điều này mâu thuẫn với  $Q(x, x)$  xác định dương.

Vậy không thể có  $\Delta_i \leq 0$ , cho nên (8.5.21) cũng là điều kiện cần để  $Q(x, x)$  xác định dương.

*Thí dụ 8.5.3.* Dạng toàn phương (8.5.4) ở thí dụ 8.5.1 có  $\Delta_1 = 5 > 0$ ,  $\Delta_2 = 36 > 0$  nên là dạng toàn phương xác định dương.

### 8.5.5. Phương pháp Lagrange

Trong cơ sở  $S$  của không gian hữu hạn chiều  $V_n$  xét dạng toàn phương

$$Q(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ji} = a_{ij}.$$

Giả sử  $a_{11} \neq 0$ . Ta nhóm các số hạng chứa  $x_1$  :

$$Q = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots + 2a_{1n} x_1 x_n + \dots + a_{nn} x_n^2$$

Do đó

$$Q = \frac{1}{a_{11}} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n)^2 + Q_1.$$

trong đó  $Q_1$  không chứa  $x_1$  nữa. Đặt

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n; \quad y_i = x_i, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

thì có

$$Q = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + Q_1,$$

trong đó  $Q_1$  không chứa  $y_1$  :

$$Q_1 = \sum_{i,j=2}^n b_{ij} y_i y_j.$$

Sau đó người ta làm việc với  $Q_1$  chỉ còn chứa các  $y_2, y_3, \dots, y_n$  như với  $Q$  trước. Cứ thế, cho tới khi thu được biểu thức không chứa các số hạng chéo nữa.

Nếu  $a_{1j} = 0$  ta đi tìm trong số các  $a_{22}, \dots, a_{nn}$  có số nào khác 0, chẳng hạn  $a_{kk} \neq 0$  thì ta đổi vai trò  $a_{kk}$  thay cho  $a_{11}$ .

Nếu tất cả các  $a_{ii} = 0$  thì tồn tại ít nhất một số hạng  $2a_{ij} x_i x_j$  với  $a_{ij} \neq 0$ . Lúc đó ta đặt

$$x_i = y_i + y_j, \quad x_j = y_i - y_j, \quad x_k = y_k, \quad k \neq i, j$$

thì có

$$2a_{ij} x_i x_j = 2a_{ij} (y_i^2 - y_j^2),$$

nghĩa là trong biểu thức của dạng toàn phương đã xuất hiện các số hạng bình phương. Ta tiếp tục làm lại từ đầu.

Bây giờ ta xét một thí dụ.

*Thí dụ 8.5.4.* Xét dạng toàn phương (8.5.4).

Ta viết

$$\begin{aligned} Q(x, x) &= 5 \left( x_1^2 - \frac{4}{5} x_1 x_2 \right) + 8x_2^2 = \\ &= 5 \left( x_1 - \frac{2}{5} x_2 \right)^2 - 5 \left( \frac{2}{5} \right)^2 x_2^2 + 8x_2^2 = 5 \left( x_1 - \frac{2}{5} x_2 \right)^2 + \frac{36}{5} x_2^2. \end{aligned}$$

Đặt  $y_1 = x_1 - \frac{2}{5} x_2, \quad y_2 = x_2$

ta được  $Q(x, x) = 5y_1^2 + \frac{36}{5} y_2^2 \quad (8.5.22)$

Đó là dạng chính tắc cần tìm.



*Thí dụ 8.5.5. Xét dạng toàn phương*

$$Q(x, x) = 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 - x_2^2 - 8x_3^2$$

Ta viết lại

$$Q(x, x) = -x_2^2 + 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 - 8x_3^2$$

và đặt

$$x_1 = \xi_2, \quad x_2 = \xi_1, \quad x_3 = \xi_3$$

thì được

$$Q(x, x) = -\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 + 4\xi_2 \xi_3 - 8\xi_3^2$$

Ta viết lại

$$Q(x, x) = -(\xi_1 - \xi_2)^2 + \xi_2^2 + 4\xi_2 \xi_3 - 8\xi_3^2$$

và đặt

$$y_1 = \xi_1 - \xi_2, \quad y_2 = \xi_2, \quad y_3 = \xi_3$$

thì được

$$Q(x, x) = -y_1^2 + y_2^2 + 4y_2 y_3 - 8y_3^2.$$

Ta viết lại

$$Q(x, x) = -y_1^2 + (y_2 + 2y_3)^2 - 4y_3^2 - 8y_3^2 = -y_1^2 + (y_2 + 2y_3)^2 - 12y_3^2$$

và đặt

$$\eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2 + 2y_3, \quad \eta_3 = y_3$$

thì được

$$Q(x, x) = -\eta_1^2 + \eta_2^2 - 12\eta_3^2$$

với các công thức đổi biến

$$\eta_1 = y_1 = \xi_1 - \xi_2 = x_2 - x_1$$

$$\eta_2 = y_2 + 2y_3 = \xi_2 + 2\xi_3 = x_1 + 2x_3$$

$$\eta_3 = y_3 = \xi_3 = x_3$$

hay

$$x_1 = \eta_2 - 2\eta_3$$

$$x_2 = \eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3 \tag{8.5.23}$$

$$x_3 = \eta_3.$$

**Hệ quả.** Cho trong cơ sở  $S$  của không gian  $V_n$  dạng toàn phương  $Q$ . Tồn tại ít nhất một cơ sở  $S'$  trong đó  $Q$  có dạng chính tắc.

### 8.5.6. Định luật quán tính

Một dạng toàn phương có thể có nhiều dạng chính tắc khác nhau (trong những cơ sở mới khác nhau). Ví dụ dạng toàn phương (8.5.4) có ít ra là ba dạng chính tắc khác nhau : (8.5.5), (8.5.19), (8.5.22). Sở dĩ vậy là vì ta đã sử dụng ba phép đổi biến khác nhau, đó là (8.5.6), (8.5.20) và (8.5.23).

*Khi một dạng toàn phương được đưa về dạng chính tắc bằng hai cách khác nhau (tức là trong hai cơ sở mới khác nhau) thì số các hệ số dương bằng nhau và số các hệ số âm bằng nhau.*

Đó là nội dung của định luật quán tính.

Từ phát biểu trên ta suy ra : số các hệ số bằng không cũng bằng nhau.

## 8.6. ÁP DỤNG

### 8.6.1. Áp dụng 1 : Nhận dạng đường bậc hai

Xét phương trình bậc hai tổng quát đối với cặp tọa độ đề các  $(x_1, x_2)$  của điểm  $x \in \mathbf{R}^2$  :

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2gx_1 + 2hx_2 + d = 0, \quad (8.6.1)$$

trong đó  $a, b, c, g, h, d$  là những số thực cho trước. Ta muốn biết đường bậc hai này là đường gì ? đường tròn hay đường elip ? v.v.

Vế trái của (8.6.1) là tổng của hai hàm : một hàm bậc hai  $q$  và một hàm bậc nhất  $p$  với

$$q := ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \quad p := 2gx_1 + 2hx_2 + d.$$

Ta nhận thấy  $q$  là một dạng toàn phương trong cơ sở  $S = \{i = (1, 0), j = (0, 1)\}$  của  $\mathbf{R}^2$  với ma trận đối xứng :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (8.6.2)$$

Phương trình đặc trưng của  $A$  là

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Nó có hai nghiệm thực  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$ , thoả mãn điều kiện

$$\lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = a + c.$$

Đó là hai trị riêng thực của  $A$ . Hai vectơ riêng trực chuẩn tương ứng có dạng

$$f_1 = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix}.$$

Bằng phép đổi biến sang cơ sở mới  $S' = \{f_1, f_2\}$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ x \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \\ P \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \\ \xi \end{matrix} \quad (8.6.3)$$

ta đưa dạng toàn phương  $q$  về dạng chính tắc trong cơ sở mới :

$$q = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2.$$

Do đó phương trình (8.6.1) có dạng

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + 2g x_1 + 2h x_2 + d = 0$$

hay

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + 2g(f_{11}\xi_1 + f_{12}\xi_2) + 2h(f_{21}\xi_1 + f_{22}\xi_2) + d = 0$$

hay

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + 2g'\xi_1 + 2h'\xi_2 + d = 0, \quad (8.6.4)$$

trong đó

$$g' = gf_{11} + hf_{21}, \quad h' = gf_{12} + hf_{22}$$

**I. Trường hợp  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  khác 0 và cùng dấu, tức là khi  $ac - b^2 > 0$ .**

Ta viết lại phương trình (8.6.4) :

$$\lambda_1 \left( \xi_1 + \frac{g'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( \xi_2 + \frac{h'}{\lambda_2} \right)^2 = d' \quad (8.6.5)$$

trong đó

$$d' = \lambda_1 \left( \frac{g'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( \frac{h'}{\lambda_2} \right)^2 - d = \frac{(g')^2}{\lambda_1} + \frac{(h')^2}{\lambda_2} - d.$$

Áp dụng công thức tịnh tiến trục (xem mục 4.2.5) :

$$X_1 = \xi_1 + \frac{g'}{\lambda_1}, \quad X_2 = \xi_2 + \frac{h'}{\lambda_2}$$

ta đưa (8.6.5) về dạng :

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 = d' \quad (8.6.6)$$

1. Giả sử  $d' \neq 0$  và cùng dấu với  $\lambda_1, \lambda_2$ . Ta chia hai vế của (8.6.6) cho  $d'$  :

$$\frac{X_1^2}{(d'/\lambda_1)} + \frac{X_2^2}{(d'/\lambda_2)} = 1 \quad (8.6.7)$$

Đây là một elip thực với các bán trục  $\sqrt{d'/\lambda_1}$  và  $\sqrt{d'/\lambda_2}$ .

Đặc biệt nếu  $\lambda_1 = \lambda_2$  nữa thì elip thực trở thành một đường tròn thực với bán kính  $\sqrt{d'/\lambda_1}$ .

2. Nếu  $d' \neq 0$  và khác dấu của  $\lambda_1, \lambda_2$  thì (8.6.7) viết

$$\frac{X_1^2}{i^2(-d'/\lambda_1)} + \frac{X_2^2}{i^2(-d'/\lambda_2)} = 1$$

và ta có một elip với các bán trục ảo  $i\sqrt{-d'/\lambda_1}$  và  $i\sqrt{-d'/\lambda_2}$ . Ta gọi nó là một elip ảo.

3. Nếu  $d' = 0$  thì (8.6.6) cho

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 = 0.$$

Cả đường bậc hai thu về một điểm ( $X_1 = 0, X_2 = 0$ ).

**II. Trường hợp  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  khác 0 và khác dấu tức là khi  $ac - b^2 < 0$ .**

Giả sử  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ .

Giống như ở I. ta có (8.6.6).

1. Nếu  $d' \neq 0$  thì từ (8.6.6) ta suy ra (8.6.7) và (8.6.7) cho :

$$\frac{\lambda_1}{d'} X_1^2 - \frac{-\lambda_2}{d'} X_2^2 = 1.$$

Bây giờ dù dấu của  $d'$  thế nào ta cũng có một hyperbôn.

2. Nếu  $d' = 0$  thì (8.6.6) viết

$$\lambda_1 X_1^2 - (-\lambda_2 X_2^2) = 0.$$

Do đó có

$$\sqrt{\lambda_1} X_1 = \pm \sqrt{-\lambda_2} X_2.$$

Đây là hai đường thẳng cắt nhau.

**III. Trường hợp có một trị riêng bằng 0 tức là khi  $ac - b^2 = 0$  và  $a + c \neq 0$ .**

Giả sử  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ , phương trình (8.6.4) viết

$$\lambda_1 \xi_1^2 + 2g' \xi_1 + 2h' \xi_2 + d = 0. \quad (8.6.8)$$

1. Nếu  $h' \neq 0$  ta có

$$\xi_2 = -\frac{1}{2h'} (\lambda_1 \xi_1^2 + 2g' \xi_1 + d)$$

Đây là một parabol có trục song song với trục  $\xi_2$ .

2. Nếu  $h' = 0$  thì (8.6.8) viết

$$\left(\xi_1 + \frac{g'}{\lambda_1}\right)^2 + \frac{d''}{\lambda_1} = 0 \quad (8.6.9)$$

trong đó

$$d'' = d - \frac{(g')^2}{\lambda_1}.$$

a) Nếu  $d'' \neq 0$  và khác dấu của  $\lambda_1$  thì (8.6.9) cho

$$\xi_1 = -\frac{g'}{\lambda_1} \pm \sqrt{-\frac{d''}{\lambda_1}}$$

Đó là hai đường thẳng thực song song.

b) Nếu  $d'' \neq 0$  và cùng dấu với  $\lambda_1$  thì (8.6.9) cho

$$\xi_1 = -\frac{g'}{\lambda_1} \pm i\sqrt{\frac{d''}{\lambda_1}}$$

Đó là hai đường thẳng ảo song song.

c) Nếu  $d'' = 0$  thì (8.6.9) chỉ còn

$$\left(\xi_1 + \frac{g'}{\lambda_1}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\xi_1 + \frac{g'}{\lambda_1}\right) = 0$$

Đó là hai đường thẳng thực trùng nhau.

**IV. Trường hợp  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  tức là khi  $ac - b^2 = 0$  và  $a + c = 0$ .**

$$ac - b^2 = 0, a + c = 0 \Rightarrow a^2 + c^2 + 2b^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$$

Vậy phương trình bậc hai (8.6.1) chỉ còn số hạng bậc nhất

$$2gx_1 + 2hx_2 + d = 0$$

Đó là một đường thẳng.

Tóm lại :

Khi  $\delta = b^2 - ac < 0$  thì đường bậc hai đã cho là một elip thực hoặc ảo ;

Khi  $\delta = b^2 - ac > 0$  thì đường bậc hai đã cho là một hypebôn hoặc hai đường thẳng cắt nhau.

Người ta xem hai đường thẳng cắt nhau là một hypebôn suy biến.

Nếu  $\delta = b^2 - ac = 0$  và  $a + c \neq 0$  thì đường bậc hai đã cho là một parabôn, hay hai đường thẳng thực song song hay hai đường thẳng ảo song song hay hai đường thẳng thực trùng nhau.

Người ta xem hai đường thẳng thực song song hay hai đường thẳng ảo song song hay hai đường thẳng thực trùng nhau là một parabôn suy biến.

Đặc biệt khi  $b^2 - ac = 0$  và  $a + c = 0$  tức là khi  $a = b = c = 0$  thì đường bậc hai thu về đường bậc nhất tức là một đường thẳng.

Dưới đây khi trình bày các thí dụ nói chung ta không sử dụng các công thức phức tạp ở trên mà chỉ áp dụng cách làm tương tự vào những phương trình bậc hai cụ thể.

*Thí dụ 8.6.1.* Hãy nhận dạng đường cong phẳng cho bởi phương trình

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 36 \quad (8.6.10)$$

*Giải :* Đó là phương trình

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 36$$

với  $a_{11} = 5, \quad a_{12} = -2, \quad a_{22} = 8$

Vậy 
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Ma trận đối xứng  $A$  có hai trị riêng

$$\lambda_1 = 4 \text{ và } \lambda_2 = 9$$

và hai vectơ riêng trực chuẩn  $v_1, v_2$  tạo thành cơ sở trực chuẩn  $B$  :

$$B = \{[v_1]_E, [v_2]_E\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}.$$

Ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang  $B$  là

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Ma trận này sẽ làm chéo hoá trực giao ma trận  $A$ . Với mọi  $x \in \mathbb{R}^2$

ta kí hiệu  $[x]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $[x]_B = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$ .

Vì có

$$[x]_E = P[x]_B \quad \text{và} \quad [x]_B = P'[x]_E$$

nên ta suy ra

$$[x]_E' A [x]_E = [x]_B' (P' A P) [x]_B = [x]_B' D [x]_B,$$

trong đó

$$D = P' A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$[x]_B' D [x]_B = [x'_1 \ x'_2] \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = 4x_1'^2 + 9x_2'^2.$$

Vậy phương trình (8.6.10) trong toạ độ cũ  $(x_1, x_2)$  trở thành phương trình trong toạ độ mới  $(x'_1, x'_2)$  :

$$4x_1'^2 + 9x_2'^2 = 36,$$



nghĩa là

$$\frac{x_1'^2}{9} + \frac{x_2'^2}{4} = 1.$$

Đó là phương trình của đường elip trong hệ trục mới  $x'_1, x'_2$  có bán trục lớn là 3 và bán trục nhỏ là 2.

Công thức đổi biến

$$[x]_E = P[x]_B$$

viết

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{và cho } x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}x'_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}x'_2; \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x'_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}x'_2.$$

Đó là công thức quay trục một góc  $\theta$  sao cho

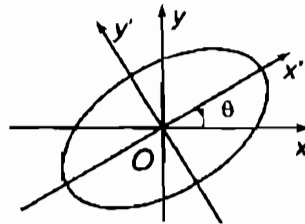
$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

đúng là

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Vậy từ hệ trục cũ ta có thể dựng hệ trục mới, sau đó dựng đường elip (hình 55).

*Thí dụ 8.6.2.* Hãy nhận dạng đường cong phẳng



Hình 55

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{80}{\sqrt{5}}x_2 + 4 = 0 \quad (8.6.11)$$

*Giải :* Với

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \text{ và } K = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Phương trình (8.6.11) viết

$$[x]_E' A[x]_E + K[x]_E + 4 = 0. \quad (8.6.12)$$

Như ở thí dụ trên đã rõ

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

làm chéo hoá trực giao ma trận  $A$ . Thay  $[x]_E = P[x]_B$  vào (8.6.12)

ta được

$$(P[x]_B)' A(P[x]_B) + K(P[x]_B) + 4 = 0$$

hay

$$[x]_B' (P' A P)[x]_B + (K P)[x]_B + 4 = 0. \quad (8.6.13)$$

Vì

$$P' A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

và

$$K P = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = [-8, -36]$$

nên (8.6.13) trở thành

$$4x_1'^2 + 9x_2'^2 - 8x_1' - 36x_2' + 4 = 0. \quad (8.6.14)$$

Ta viết (8.6.14) thành

$$4(x_1'^2 - 2x_1' + 1) + 9(x_2'^2 - 4x_2' + 4) = -4 + 4 + 36$$

tức là

$$4(x_1' - 1)^2 + 9(x_2' - 2)^2 = 36. \quad (8.6.15)$$

Đặt

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= x_1' - 1 \\ X_2 &= x_2' - 2 \end{aligned} \right\} \quad (8.6.16)$$

ta thu được từ (8.6.15)

$$\frac{X_1^2}{9} + \frac{X_2^2}{4} = 1.$$

Vậy đường cong phải tìm là một đường elíp, thu được bằng tịnh tiến đường elíp ở thí dụ trên theo công thức (8.6.16) (hình 56).

### 8.6.2. Áp dụng 2 : Nhận dạng mặt bậc hai

Cách giải tương tự cách làm đối với đường bậc hai.

Xét phương trình bậc hai tổng quát đối với bộ ba toạ độ đề các  $(x_1, x_2, x_3)$  của điểm  $x \in \mathbf{R}^3$  :

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2rx_1x_2 + 2sx_1x_3 + 2tx_2x_3 + 2ex_1 + 2gx_2 + 2hx_3 + d = 0, \quad (8.6.17)$$

trong đó  $a, b, c, r, s, t, e, g, h, d$  là những số thực cho trước.

Vế trái của (8.6.17) là tổng của hai hàm : một hàm bậc hai  $q$  và một hàm bậc nhất  $p$  với

$$q := ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2rx_1x_2 + 2sx_1x_3 + 2tx_2x_3,$$

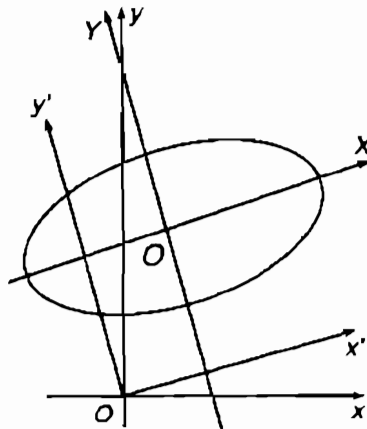
$$p := 2ex_1 + 2gx_2 + 2hx_3 + d = 0.$$

Ta nhận thấy  $q$  là một dạng toàn phương trong cơ sở  $S = \{i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)\}$  của  $\mathbf{R}^3$  với ma trận đối xứng :

$$A = \begin{bmatrix} a & r & s \\ r & b & t \\ s & t & c \end{bmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng của  $A$  là

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & r & s \\ r & b - \lambda & t \\ s & t & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$



Hình 56

Nó có ba nghiệm thực  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  và  $\lambda_3$ . Đó là ba trị riêng thực của

A. Ba vectơ riêng trực chuẩn tương ứng có dạng

$$f_1 = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \end{bmatrix}, \quad f_3 = \begin{bmatrix} f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{bmatrix}$$

Bằng phép đổi biến sang cơ sở mới  $S' = \{f_1, f_2, f_3\}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}}_P \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}}_\xi$$

ta đưa dạng toàn phương  $q$  về dạng chính tắc trong cơ sở mới :

$$q = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2.$$

Do đó (8.6.17) có dạng

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + 2e\xi_1 + 2g\xi_2 + 2h\xi_3 + d = 0 \quad (8.6.18)$$

hay

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + 2e(f_{11}\xi_1 + f_{12}\xi_2 + f_{13}\xi_3) + \\ 2g(f_{21}\xi_1 + f_{22}\xi_2 + f_{23}\xi_3) + 2h(f_{31}\xi_1 + f_{32}\xi_2 + f_{33}\xi_3) + d = 0$$

hay

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + 2e'\xi_1 + 2g'\xi_2 + 2h'\xi_3 + d = 0, \quad (8.6.19)$$

trong đó

$$e' = ef_{11} + gf_{21} + hf_{31}, \quad g' = ef_{12} + gf_{22} + hf_{32}, \\ h' = ef_{13} + gf_{23} + hf_{33}.$$

Sau đó áp dụng những phép tịnh tiến trực thích hợp ta có thể đưa các phương trình trên về các dạng đơn giản và từ đó suy ra dạng của mặt bậc hai. Sau đây là một số trường hợp hay gặp.

**I. Trường hợp  $\lambda_1, \lambda_2$  và  $\lambda_3$  khác 0 (khi  $\det(A) \neq 0$ ) và cùng dấu**

Ta viết lại (8.6.19) :

$$\lambda_1 \left( \xi_1 + \frac{e'}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( \xi_2 + \frac{g'}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_3 \left( \xi_3 + \frac{h'}{\lambda_3} \right)^2 = d'$$

$$d' = -d + \frac{(e')^2}{\lambda_1} + \frac{(g')^2}{\lambda_2} + \frac{(h')^2}{\lambda_3}.$$

Áp dụng công thức tịnh tiến trục :

$$\xi_1 + \frac{e'}{\lambda_1} = X_1, \quad \xi_2 + \frac{g'}{\lambda_2} = X_2, \quad \xi_3 + \frac{h'}{\lambda_3} = X_3 \quad (8.6.20)$$

ta được

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 = d' \quad (8.6.21)$$

1. Nếu  $d' \neq 0$  và cùng dấu với các trị riêng thì (8.6.21) viết

$$\frac{\lambda_1}{d'} X_1^2 + \frac{\lambda_2}{d'} X_2^2 + \frac{\lambda_3}{d'} X_3^2 = 1$$

Đó là một mặt elipxôit thực.

Đặc biệt khi  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  thì mặt elipxôit thực trở thành một mặt cầu bán kính  $\sqrt{d'/\lambda_1}$ .

2. Nếu  $d' \neq 0$  và khác dấu của các trị riêng thì (8.6.21) viết

$$\frac{\lambda_1}{d'} X_1^2 + \frac{\lambda_2}{d'} X_2^2 + \frac{\lambda_3}{d'} X_3^2 = i^2$$

Đó là một mặt elipxôit ảo.

3. Nếu  $d' = 0$  thì (8.6.21) viết

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 = 0.$$

Vậy cả mặt bậc hai thu về một điểm ( $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$ ).

## II. Trường hợp ba trị riêng khác 0 trong đó có hai trị riêng cùng dấu và một trị riêng khác dấu

Giả sử  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ . Giống như ở I. ta có (8.6.21).

1. Nếu  $d' > 0$  thì (8.6.21) cho

$$\frac{\lambda_1}{d'} X_1^2 + \frac{\lambda_2}{d'} X_2^2 - \left( -\frac{\lambda_3}{d'} \right) X_3^2 = 1$$

Đó là một mặt hypebôloit một tầng.

2. Nếu  $d' < 0$  thì (8.6.21) cho

$$\frac{\lambda_1}{-d'} X_1^2 + \frac{\lambda_2}{-d'} X_2^2 - \frac{\lambda_3}{d'} X_3^2 = -1$$

Đó là một mặt hypebôloit hai tầng.

## III. Trường hợp có một trị riêng bằng 0, còn hai trị riêng kia cùng dấu

Giả sử  $\lambda_3 = 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . Phương trình (8.6.19) viết

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + 2e' \xi_1 + 2g' \xi_2 + 2h' \xi_3 + d = 0$$

Áp dụng công thức tịnh tiến trục

$$\xi_1 + \frac{e'}{\lambda_1} = X_1, \quad \xi_2 + \frac{g'}{\lambda_2} = X_2, \quad \xi_3 = X_3 \quad (8.6.22)$$

ta được

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + 2h' X_3 = d'. \quad (8.6.23)$$

trong đó

$$d' = -d + \frac{(e')^2}{\lambda_1} + \frac{(g')^2}{\lambda_2}.$$

1. Nếu  $h' \neq 0$  thì (8.6.23) là một mặt parabolôit elliptic (mặt parabolôit loại elip).

2. Nếu  $h' = 0$  thì (8.6.23) viết

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 = d'.$$

Đây là một mặt trụ có đường sinh song song với phương  $X_3$ .

#### IV. Trường hợp có một trị riêng bằng 0, còn hai trị riêng kia khác dấu

Giả sử  $\lambda_3 = 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . Giống như ở II, ta có (8.6.23).

1. Nếu  $h' \neq 0$  thì (8.6.23) là một mặt parabolôit hypebôlôit (mặt parabolôit loại hypebôn).

2. Nếu  $h' = 0$  (8.6.23) cho

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 = d'.$$

Đây là một mặt trụ có đường sinh song song với phương  $X_3$ .

#### V. Trường hợp có hai trị riêng bằng 0

Giả sử  $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ . Phương trình (8.6.19) viết

$$\lambda_1 \xi_1^2 + 2e' \xi_1 + 2g' \xi_2 + 2h' \xi_3 + d = 0$$

Áp dụng công thức tịnh tiến trục

$$\xi_1 + \frac{e'}{\lambda_1} = X_1, \quad \xi_2 = X_2, \quad \xi_3 = X_3 \quad (8.6.24)$$

ta được

$$\lambda_1 X_1^2 + 2g' X_2 + 2h' X_3 = d'$$

$$d' = -d + \frac{(e')^2}{\lambda_1}$$

1. Nếu  $g' = 0$ ,  $h' \neq 0$ . Ta có một mặt trụ parabolôit có đường sinh song song với phương  $X_3$ .

2. Nếu  $g' \neq 0$ ,  $h' = 0$ . Ta có một mặt trụ parabolôit có đường sinh song song với phương  $X_2$ .

3. Nếu  $g' \neq 0, h' \neq 0$ . Ta có một mặt trụ parabol có đường sinh song song với phương vuông góc với đường thẳng  $g'\xi_2 + h'\xi_3 = 0$ .

### VI. Trường hợp cả ba trị riêng đều bằng 0

Khi đó phương trình bậc hai (8.6.19) chỉ còn

$$e'\xi_1 + g'\xi_2 + h'\xi_3 + d = 0$$

Đó là một mặt phẳng.

Sau đây ta xét một vài thí dụ để minh hoạ.

*Thí dụ 8.6.3.* Hãy nhận dạng mặt bậc hai

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 16.$$

*Giải :* Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ma trận đối xứng  $A$  có ba trị riêng

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4$$

và 3 vectơ riêng tạo thành cơ sở trực chuẩn

$$B = \{[v_1]_E, [v_2]_E, [v_3]_E\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}.$$

Gọi  $P$  là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở chính tắc sang  $B$

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

thì có công thức đổi tọa độ

$$[x]_E = P[x]_B, \quad [x]_B = P'[x]_E.$$



Do đó

$$\begin{aligned}
 [x]_E^t A [x]_E &= (P[x]_B)^t A (P[x]_B) \\
 &= [x]_B^t (P^t A P) [x]_B \\
 &= [x]_B^t D [x]_B,
 \end{aligned}$$

trong đó

$$D = P^t A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Cho nên

$$[x]_B^t D [x]_B = [x'_1 \ x'_2 \ x'_3] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}.$$

Vậy phương trình đã cho trong tọa độ cũ  $(x_1, x_2, x_3)$  trở thành phương trình trong tọa độ mới  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  :

$$x_1'^2 + 2x_2'^2 + 4x_3'^2 = 16$$

hay

$$\frac{x_1'^2}{16} + \frac{x_2'^2}{8} + \frac{x_3'^2}{4} = 1.$$

Đó là phương trình của mặt elipxôit có các bán trục là 4,  $\sqrt{8}$  và 2.

### 8.6.3. Áp dụng 3 : Một bài toán cực trị có điều kiện

$V_n$  là một không gian có tích vô hướng.  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $V_n$ . Xét trong cơ sở  $S$  dạng toàn phương

$$Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ji} = a_{ij}. \quad (8.6.25)$$

Hãy tìm cực trị của  $Q$  với điều kiện

$$x^t x = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1. \quad (8.6.26)$$

Để giải ta đặt  $A = [a_{ij}]$  thì  $A^t = A$  và (8.6.25) viết  $Q = x^t Ax$ .

Vì  $A$  đối xứng nên nó có  $n$  trị riêng  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ứng với  $n$  vectơ riêng  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  tạo thành một cơ sở trực chuẩn mới  $S' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ . Bằng phép đổi biến trực giao  $x = P\xi$  từ  $S$  sang  $S'$  ta đưa  $Q$  về dạng chính tắc :

$$Q = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2. \quad (8.6.27)$$

Giả sử

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n. \quad (8.6.28)$$

Khi đó

$$\lambda_1 \xi^t \xi = \lambda_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq Q \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \lambda_n \xi^t \xi. \quad (8.6.29)$$

Vì

$$x = P\xi \Rightarrow x^t x = (P\xi)^t (P\xi) = \xi^t P^t P \xi = \xi^t \xi$$

nên (8.6.29) và (8.6.26) cho

$$\lambda_1 \leq Q \leq \lambda_n. \quad (8.6.30)$$

Căn cứ vào (8.6.30) và (8.6.27) ta suy ra kết quả :

$Q$  đạt giá trị lớn nhất là  $\lambda_n$  tại  $\xi^{(M)} = (1, 0, \dots, 0)$  tức là tại  $x^{(M)} = P^{-1}\xi^{(M)} = P^t \xi^{(M)}$  và đạt giá trị bé nhất là  $\lambda_1$  tại  $\xi^{(m)} = (0, \dots, 0, 1)$  tức là tại  $x^{(m)} = P^{-1}\xi^{(m)} = P^t \xi^{(m)}$ .

*Thí dụ 8.6.4.* Xét dạng toàn phương (8.5.4) trong  $\mathbf{R}^2$  ở thí dụ 8.5.1. Bằng phép đổi biến trực giao (8.5.6) ta đã đưa nó về dạng chính tắc (8.5.5). Vậy nó đạt giá trị lớn nhất là 9 tại  $\xi^{(M)} = (1, 0)$ , tức là tại  $x^{(M)} = (1/\sqrt{5}) (2, 1)$  và giá trị bé nhất là 4 tại  $\xi^{(m)} = (0, 1)$ , tức là tại  $x^{(m)} = (1/\sqrt{5}) (-1, 2)$

## BÀI TẬP CHƯƠNG VIII

**8.1.** Tìm dạng chính tắc của mỗi dạng toàn phương sau :

1)  $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

2)  $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

3)  $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

**8.2.** Tìm phép biến đổi tuyến tính để đưa mỗi dạng toàn phương dưới đây về dạng chính tắc và cho biết dạng chính tắc đó :

1)  $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$

2)  $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$

3)  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

4)  $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$

5)  $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$

**8.3.** Nhận dạng và vẽ các đường bậc hai sau :

a)  $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$

b)  $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$

c)  $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$

d)  $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$

e)  $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 24$

f)  $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 18$

g)  $x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 = 36$

h)  $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 = 36$

8.4. Nhận dạng và vẽ các mặt bậc hai sau :

a)  $2x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2 = 16$

b)  $2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z = 0$

c)  $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z = 24$

d)  $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$

e)  $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$

### ĐÁP SỐ

8.1. 1)  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$  ;

2)  $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

3)  $y_1^2 - y_2^2$

8.2. 1)  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

$$x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3, \quad x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3, \quad x_3 = \frac{1}{3}y_3$$

2)  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, \quad x_1 = \frac{1}{2}y_1 + y_2, \quad x_2 = y_2 + y_3, \quad x_3 = -y_2 + y_3.$

3)  $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2, \quad x_1 = y_1 - y_2 - y_3, \quad x_2 = y_1 + y_2 - y_3, \quad x_3 = y_3.$

4)  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, \quad x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}y_1 - \frac{5}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3,$

$$x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3, \quad x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}y_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}y_3.$$

5)  $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, \quad x_1 = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{3}y_3.$

$$x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2, \quad x_3 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$$

- 8.3. a) Hypebol  $2x'^2 - 3y'^2 = 8$   
 b) Parabol  $2\sqrt{2}x'^2 - 7x' + 9y' = 0$   
 c) Elip  $7x'^2 + 3y'^2 = 9$   
 d) Hypebol  $4x'^2 - y'^2 = 3$   
 e) Elip  
 f) Elip  
 g) Hypebol  
 h) Elip  $4x_1'^2 + 9x_2'^2 = 36$
- 8.4. a) Elipxôit  $x_1'^2 + 2x_2'^2 + 4x_3'^2 = 16$   
 b) Hypebôlôit 2 tầng  $x'^2 + y'^2 - 2z'^2 = -10$   
 c) Elipxôit  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 4$   
 d) Parabôlôit hypebôlic  $x'^2 - y'^2 + z' = 0$   
 e) Parabôlôit eliptic  $6x'^2 + 3y'^2 - 8\sqrt{2}z' = 0$

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Kim Cương - Toán cao cấp - Tập 1 - Đại số - NXB Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, Hà Nội, 1990.
2. L.Lesieur - CL. Joulain - Toán cao cấp, II.
3. Howard Anton - Elementary Linear Algebra - 1977
4. Carroll Wilde - Linear Algebra - 1987
5. Г.М. Гедьфанд. Лекция по линейной алгебре. 1966

# MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
<i>Lời nói đầu</i>	3
<b>Chương I. TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ</b>	<b>5</b>
1.0. Mở đầu	5
1.1. Tập hợp và phần tử	6
1.2. Các phép toán về tập hợp	10
1.3. Tích đề các	14
1.4. Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự	15
1.5. Ánh xạ	20
1.6. Tập hữu hạn - Tập đếm được - Tập không đếm được	28
1.7. Đại số tổ hợp	30
Tóm tắt chương I	34
Bài tập chương I	37
Đáp số	43
<b>Chương II. CẤU TRÚC ĐẠI SỐ - SỐ PHỨC -     ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC HỮU TỈ</b>	<b>47</b>
2.1. Luật hợp thành trong trên một tập	47
2.2. Cấu trúc nhóm	50
2.3. Cấu trúc vành	52
2.4. Cấu trúc trường	53
2.5. Số phức	54
	<b>387</b>

2.6. Đa thức	66
2.7. Phân thức hữu tỉ	73
Tóm tắt chương II	78
Bài tập chương II	82
Đáp số	87
<b>Chương III. MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH</b>	<b>92</b>
3.1. Ma trận	92
3.2. Định thức	100
3.3. Ma trận nghịch đảo	109
3.4. Hệ phương trình tuyến tính	115
3.5. Hàng của ma trận - Hệ phương trình tuyến tính tổng quát	127
3.6. Phụ lục	134
Tóm tắt chương III	145
Bài tập chương III	149
Đáp số	161
<b>Chương IV. HÌNH HỌC GIẢI TÍCH</b>	
(Ôn tập : Đường bậc hai và mặt bậc hai)	168
4.1. Mở đầu	168
4.2. Đường bậc hai trong mặt phẳng	168
4.3. Mặt bậc hai	178
Bài tập chương IV	189
Đáp số	191
<b>Chương V. KHÔNG GIAN VECTƠ - KHÔNG GIAN EUCLID</b>	<b>194</b>
5.1. Không gian vectơ - Định nghĩa và thí dụ	194
5.2. Không gian con và hệ sinh	203
5.3. Họ vectơ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính	209
5.4. Không gian hữu hạn chiều và cơ sở của nó	211



5.5. Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi một họ vectơ	219
5.6. Tích vô hướng và không gian có tích vô hướng	222
5.7. Toạ độ trong không gian $n$ chiều	236
5.8. Bài toán đổi cơ sở	241
Tóm tắt chương V	247
Bài tập chương V	253
Đáp số	269
<b>Chương VI. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH</b>	<b>275</b>
6.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính	275
6.2. Các tính chất của ánh xạ tuyến tính - Hạt nhân và ảnh	286
6.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính	292
6.4. Sự đồng dạng	302
Tóm tắt chương VI	305
Bài tập chương VI	306
Đáp số	314
<b>Chương VII. TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG CỦA TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH</b>	<b>319</b>
7.1. Trị riêng và vectơ riêng của ma trận	319
7.2. Trị riêng và vectơ riêng của toán tử tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều	324
7.3. Vấn đề chéo hoá ma trận	326
7.4. Vấn đề chéo hoá trực giao	333
7.5. Phụ lục	337
Tóm tắt chương VII	340
Bài tập chương VII	341
Đáp số	344
<b>Chương VIII. DẠNG TOÀN PHƯƠNG</b>	<b>348</b>
8.1. Dạng tuyến tính trên không gian vectơ $V$	348
8.2. Dạng song tuyến trên không gian vectơ $V$	348
	<b>389</b>

8.3. Dạng toàn phương trên không gian vectơ $V$	349
8.4. Dạng song tuyến và dạng toàn phương trên không gian $n$ chiều	351
8.5. Rút gọn dạng toàn phương	355
8.6. Áp dụng	366
Bài tập chương VIII	383
Đáp số	384

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI  
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

*Biên tập lần đầu :*

NGUYỄN VĂN THƯỜNG

*Biên tập tái bản :*

NGUYỄN TRỌNG HẢI

*Biên tập kĩ thuật :*

BÙI CHÍ HIẾU

*Sửa bản in :*

PHÒNG SỬA BẢN IN (NXB GIÁO DỤC)

*Chế bản :*

PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

---

**TOÁN HỌC CAO CẤP - TẬP 1**  
**ĐẠI SỐ VÀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH**  
**Mã số : 7K075T6 - DAI**

In 5.000 bản, khổ 14.3 x 20.3 cm tại Công ty cổ phần in Sách giáo khoa  
tại TP - Hà Nội. Số xuất bản: 04-2006/CXB/111-1860/GD. In xong và  
nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2006.



CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ  
**HEVOBCO**

Địa chỉ : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

Tìm đọc

## **SÁCH THAM KHẢO ĐẠI HỌC BỘ MÔN TOÁN** của Nhà xuất bản Giáo dục

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| <b>1. Giải tích hàm</b>  | Nguyễn Xuân Liêm              |
| <b>2. Bài tập giải tích hàm</b>                                | Nguyễn Xuân Liêm              |
| <b>3. Tôpô đại cương - Độ đo và tích phân</b>                  | Nguyễn Xuân Liêm              |
| <b>4. Giải tích tập 1</b>                                      | Nguyễn Xuân Liêm              |
| <b>5. Giải tích tập 2</b>                                      | Nguyễn Xuân Liêm              |
| <b>6. Đại số đại cương</b>                                     | Nguyễn Hữu Việt Hưng          |
| <b>7. Số đại số</b>  | Hoàng Xuân Sinh               |
| <b>8. Hình học vi phân</b>                                     | Đoàn Quỳnh                    |
| <b>9. Giải tích số</b>   | Nguyễn Minh Chương (Chủ biên) |
| <b>10. Phương trình đạo hàm riêng</b>                          | Nguyễn Minh Chương            |
| <b>11. Cơ sở phương trình vi phân<br/>và lý thuyết ổn định</b> | Nguyễn Thế Hoàn - Phạm Phú    |
| <b>12. Mở đầu lý thuyết xác suất và ứng dụng</b>               | Đặng Hùng Thắng               |
| <b>13. Bài tập xác suất</b>                                    | Đặng Hùng Thắng               |
| <b>14. Lý thuyết xác suất</b>                                  | Nguyễn Duy Tiến - Vũ Việt Yên |
| <b>15. Xác suất thống kê</b>                                   | Nguyễn Văn Hộ                 |
| <b>16. Phương pháp tính và các thuật toán</b>                  | Phan Văn Hạp - Lê Đình Thịnh  |
| <b>17. Từ điển toán học thông dụng</b>                         | Ngô Thúc Lanh (Chủ biên)      |
| <b>18. Toán học cao cấp (tập 1, 2, 3)</b>                      | Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)    |
| <b>19. Bài tập Toán học cao cấp (tập 1, 2, 3)</b>              | Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)    |

*Bạn đọc có thể tìm mua tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương;  
hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục:*

*Tại Hà Nội: 25 Hàn Thuyên, 81 Trần Hưng Đạo, 187B Giảng Võ, 23 Trang Tiên*

*Tại Đà Nẵng: 15 Nguyễn Chí Thanh*

*Tại Thành phố Hồ Chí Minh: 104 Mai Thị Lựu, Quận 1*



**Giá: 20.600đ**